

جمهوری اسلامی ایران

وزارت آموزش و پرورش

ریاضیات جدید

سال دوم

آموزش متوسطهٔ عمومی

ریاضی و فیزیک

۲۳۴

بسم الله الرحمن الرحیم

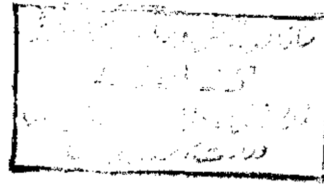
ریاضیات جدید

سال دوم

آموزش متوسطه عمومی

ریاضی و فیزیک

۱۳۶۰



پدیدآورندگان

مؤلفان ◄ ● فرشید مین باشیان ● میرزا جلیلی

صفحه پرداز ◄ طهمورث حسن پور

چاپ از ◄ چاپخانه احمدی

فهرست

لطفاً قبل از مطالعه این‌کتاب به‌نکات زیر توجه فرمایید.

الف ـ اگر A یك مجموعه و $a \in A$. a را یك عنصر و یا یك عضو از A می‌نامیم .

ب ـ مجموعه

$$\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ...\}$$

را مجموعه اعداد طبیعی و یا مجموعه اعداد درست مثبت نامیده و با N نشان می‌دهیم.

پ ـ مجموعه

$$\{... ، -۲ ، -۱ ، ۰ ، ۱ ، ۲ ، ...\}$$

را مجموعه اعداد درست نامیده و با Z نشان می‌دهیم .

ت ـ مجموعه

$$\{\frac{p}{q} \mid p ، q \in Z ، q \neq ۰\}$$

را مجموعه اعدادگویا نامیده و با Q نشان می‌دهیم.

ث ـ هر عدد حقیقی که گویا نباشد. یك عدد ناگویا (ویا گنگ) نامیده می‌شود .

ج ـ مجموعه اعداد حقیقی را با R نشان می‌دهیم .

فصل ۱

رابطه و تابع

رابطه

زوج مرتب

هر دوشئ تشکیل یك زوج را می‌دهد. برای‌مثال ۴ و ۳ یك زوج از اعداد حقیقی‌است. اگر دریك زوج ترتیب درنظر گرفته شودگوئیم یك زوج مرتب داریم. بنابراین زوج مرتب ۴ و ۳ با زوج مرتب ۳ و ۴ متفاوت است .

یك زوج مرتب a و b معمولا با نماد $(a ، b)$ نشان داده میشود . a عضو اول (و یا مؤلفه اول) و b عضو دوم (ویا مؤلفه دوم) زوج مرتب $(a ، b)$ نامیده میشود .

ازآنچه گفته شدنتیجه میشودکه اگر $a \neq b$ ،آن‌گاه $(a ، b) \neq (b ، a)$. برای مثال $(۱ ، ۲) \neq (۲ ، ۱)$.

باید توجه داشت‌که زوج مرتب $(a ، b)$ ومجموعه $\{a ، b\}$ یکی نیستند .

همانطوریکه میدانید $\{a ، b\} = \{b ، a\}$

یعنی، درمجموعهٔ $\{a ، b\}$ ترتیب‌عضوها درنظر گرفته نمی‌شود، درصورتی‌که دریك‌زوج مرتب ترتیب نوشتن عضوها اهمیت دارد. همچنین همانطوریکه میدانید $\{a ، a\} = \{a\}$ ، در حالی‌که در زوجهای مرتب چنین نیست .

تساوی زوجهای مرتب - دو زوج مرتب $(a ، b)$ و $(c ، d)$ مساوی هستند اگر و تنها اگرعضوهای اول آنها با هم وعضوهای دوم آنها نیز با هم برابرباشند، به عبارت دیگر :

$$(a ، b) = (c ، d) \iff (a = c \text{ و } b = d)$$

ممکن است‌که عضو اول یك زوج مرتب خود یك زوج مرتب باشد :

$$((a ، b) ، c)$$

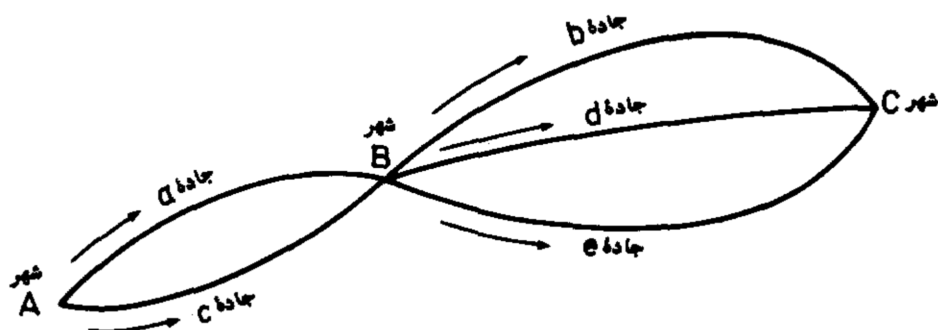
در این صورت مینویسیم :

$$(a ، b ، c) = ((a ، b) ، c)$$

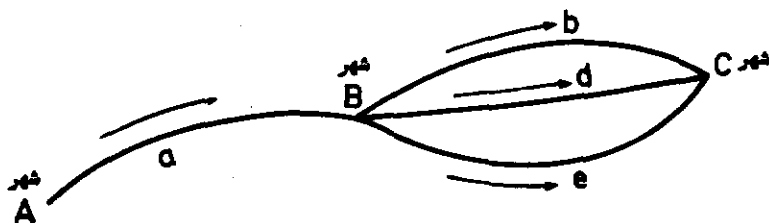
و آن را یك سه تایی مرتب می‌خوانیم. دراین سه‌تایی مرتب a ، b و c به ترتیب عضواول، عضو دوم وعضو سوم (ویا مؤلفه اول ، مؤلفه دوم ومؤلفه سوم) نامیده میشوند.

حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه

مثال ۱ ــ سه شهر A ، B و C طوری واقع شده‌اندکه بین A و B دو جاده وبین B و C سه جاده موجود است .



مسافری می‌خواهد از شهر A و از طریق B به شهر C مسافرت‌کند . می‌خواهیم ببینیم او برای رسیدن به مقصد چه مسیرهایی برای انتخاب در اختیار دارد . روشن است که این مسافر برای رفتن از A به C ابتدا باید یکی از جاده‌های a یا c سپس یکی از جاده‌های b ، d یا e را بپیماید . هرمسیری از A به C را می‌توان با یك زوج مرتب نشان داد که در آن عضو اول نمایش جادهٔ اول وعضو دوم نمایش جادهٔ دوم باشد . حال فرض‌کنید مسافر جادهٔ a را پیموده وبه شهر B رسیده است .

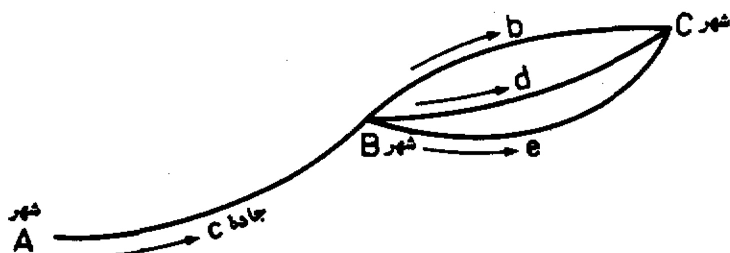


دراینجا برای رفتن به شهر C باید یکی از جاده‌های b ، d یا e ویا به عبارت دیگر یکی از مسیرهای زیررا انتخاب‌کند :

$$(a ، b) ، (a ، d) ، (a ، e)$$

اگراین مسافرازجادهٔ c به‌شهر B رفته باشد ، دراین‌صورت‌نیزبرای رسیدن به مقصدباید

یکی از جاده‌های b ، d ، e ویا یکی از مسیرهای زیررا انتخاب‌کند :



$$(c ، b) ، (c ، d) ، (c ، e)$$

با توجه به مطالب فوق ، این مسافر جمعاً مسیرهای زیر را بـرای انتخاب در اختیار خواهد داشت :

$$(a ، b) ، (a ، d) ، (a ، e) ، (c ، b) ، (c ، d) ، (c ، e) \quad (۱)$$

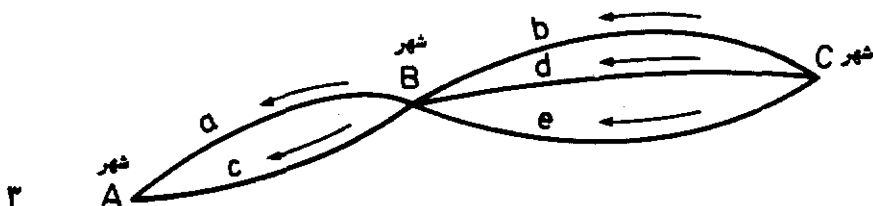
که عضو اول هر زوج مرتب از میان جاده‌های بین دو شهر A و B وعضو دوم آن از میان جاده‌های بین دوشهر B و C گرفته شده است . به عبارت دیگر ، هرگاه مجموعهٔ جاده‌های بین شهرهای A و B را با $E = \{a ، c\}$ و مجموعـهٔ جـاده‌های بین شهرهای B و C را با $F = \{b ، d ، e\}$ نشان دهیم، در نوشتن زوجهای مرتب (۱) عضو اول هـر زوج مرتب از مجموعهٔE وعضو دوم آن ازمجموعهٔF گرفته شده است. مجموعهٔ این زوجهای مرتب را حاصل‌ضرب دکارتی E در F خوانده آن را به صورت $E \times F$ نشان می‌دهند :

$$E \times F = \{ (a ، b) ، (a ، d) ، (a ، e) ، (c ، b) ، (c ، d) ، (c ، e) \}$$

این حاصل ضرب بااستفاده از جدول به صورت زیر نیز به دست می‌آید :

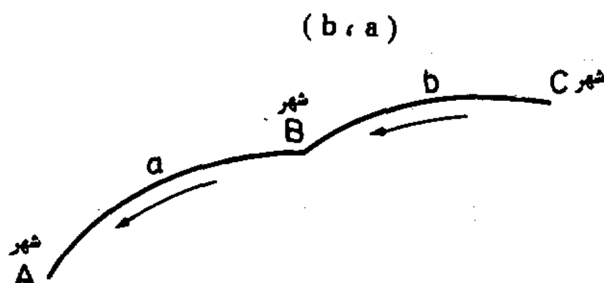
F→ / E↓	عضوهای دوم زوجها: b	d	e
عضوهای اول زوجها: a	(a ، b)	(a ، d)	(a ، e)
c	(c ، b)	(c ، d)	(c ، e)

فرض‌کنید مسافرما به شهر C رسیده و حالا قصد برگشتن به شهر A ازطریق B را دارد.



می‌خواهیم ببینیم او در سفر برگشت چه انتخابهایی می‌تواند داشته باشد . در اینجا مسافر ابتدا یکی از جاده‌های b ، d یا e را انتخاب می‌کند ، سپس از طریق a یا c به مبدأ اصلی خویش یعنی شهر A برمی‌گردد. هرکدام ازاین مسیرها را نیز می‌توان بایك زوج مرتب نشان داد . مثلا ، اگر او ابتدا جادهٔ b و بعد جادهٔ a را انتخاب‌کند ، این مسیر را با زوج مرتب زیر نشان می‌دهیم :

(b ، a)



بااین قرارداد و مطالبی‌که قبلا گفته شد ، مسیرهایی‌که این مسافر دربرگشتن در اختیار خواهدداشت تشکیل مجموعه‌ای اززوجهای مرتب خواهند دادکه عضو اول هرزوج مرتب‌از F={ b ، d ، e } وعضودوم‌آن از E={ a ، c } گرفته می‌شود . جدول زیرتمام مسیرهای ممکن برگشت از شهر C به A (از طریق B) را نشان می‌دهد :

F↓ \ E→ (عضوهای اول زوجها \ عضوهای دوم زوجها)	a	c
b	(b ، a)	(b ، c)
d	(d ، a)	(d ، c)
e	(e ، a)	(e ، c)

مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب جدول فوق که همهٔ مسیرهای برگشت از شهر C به A را نشان می‌دهد به نام حاصل‌ضرب دکارتی F در E خوانده شده آن را با F×E نشان می‌دهند:

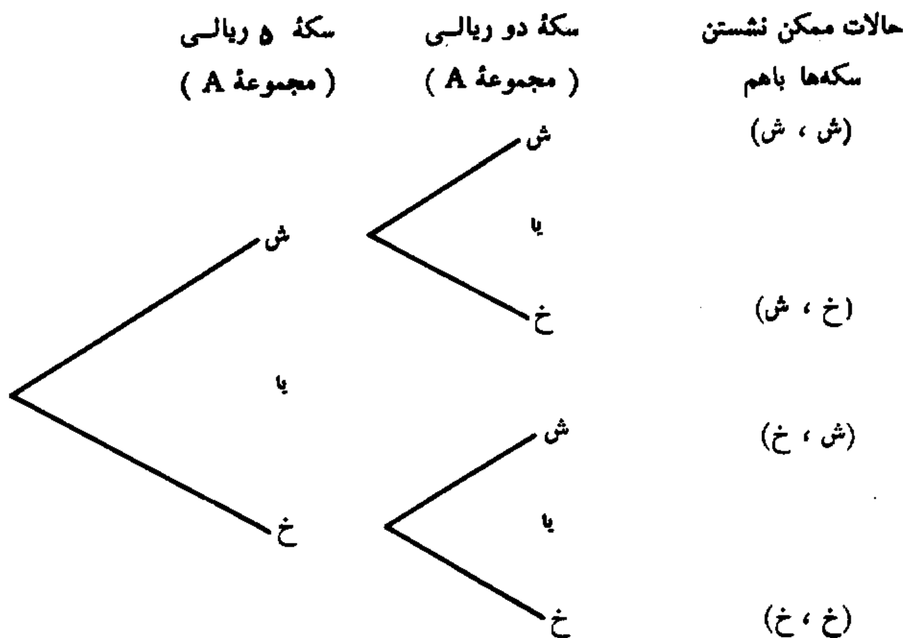
$$F\times E = \{ (b,a) , (b,c) , (d,a) , (d,c) , (e,a) , (e,c) \}$$

اگرچه هرکدام از مجموعه‌های E × F و F × E دارای ۶ عضو می‌باشد ولی از تعریف زوج مرتب نتیجه می‌شود که حاصل‌ضربهای E × F و F × E مساوی نیستند :

$$E\times F \neq F\times E$$

مثال ۲- یك سکهٔ ۵ ریالی ویك سکهٔ ۲ ریالی را باهم می‌ریزیم . حالات مختلفی راکه ممکن است این دو سکه به زمین بنشیند بنویسید .

حل : هرسکه دو رو دارد . سکهٔ ۵ ریالی بعد ازفرود آمدن شیریاخط می‌نشیند . هرگاه نشستن شیررا با حرف «ش» و نشستن خط را با حرف «خ» نشان می‌دهیم، روشن است که پس‌از نشستن سکهٔ ۵ ریالی یکی از عضوهـای مجموعهٔ A = {خ ، ش} را خواهیم داشت. بـه‌همین ترتیب پس‌ازنشستن سکهٔ ۲ریالی بازیکی ازعضوهای مجموعهٔ A = {خ ، ش} به دست می‌آید. حالات مختلف نشستن این دوسکه باهم با استفاده ازنموداری به نام نمودار درختی به صورت زیربه دست می‌آید :



مجموعهٔ این زوجهای مرتب به نام حاصل ضرب دکارتی A در A خوانده شده‌آن را به صورت زیر می‌نویسیم :

A × A = { (ش ، ش) ، (خ ، ش) ، (ش ، خ) ، (خ ، خ) }

تعریف ـ حاصل ضرب دکارتی دومجموعهٔ A و B برابر است بامجموعهٔ تمام زوجهای مرتب (a ، b) که درآن $a\in A$ و $b\in B$. به عبارت دیگر :

$$A\times B=\{(a,b) \mid a\in A \text{ و } b\in B\}$$

به همین ترتیب $B\times A$ به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$B\times A=\{(b,a) \mid b\in B \text{ و } a\in A\}$$

هرگاه مجموعهٔ A دارای n عضو و مجموعهٔ B دارای m عضو باشد، هریك از مجموعه‌های $A\times B$ یا $B\times A$ دارای mn عضو بوده ودرحالت‌کلی داریم :

$$A\times B\neq B\times A$$

در حالت $A=B$ ، $A\times A$ به‌نام‌حاصل‌ضرب‌دکارتی مجموعهٔ A در خودش خوانده می‌شود. این حاصل‌ضرب دکارتی، مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب (a ، b) است‌که‌درآن $a\in A$ و $b\in A$. یعنی این‌که :

$$A^{۲}=A\times A=\{(a,b) \mid a\in A \text{ و } b\in A\}$$

مثال ـ دو مجموعهٔ $A=\{۱،۲،۳\}$ و $B=\{a،b\}$ داده شده است؛ الف : حاصل ضربهای $A\times B$ ، $B\times A$ ، $A\times A$ و $B\times B$ را بنویسید . ب : حاصل ضرب $B\times B$ را به صورت نمودار درختی نشان دهید :

حل : الف ـ $A\times B$ مجموعهٔ تمام زوجهای مرتبی است‌که عضو اول آنها از A و عضو دوم آنها از B گرفته می‌شود :

$$A\times B=\{(۱،a)،(۲،a)،(۳،a)،(۱،b)،(۲،b)،(۳،b)\}$$

به همین ترتیب حاصل ضرب $B\times A$ مجموعهٔ تمام زوجهای مرتبی است‌که عضو اول هرزوج از B وعضو دوم‌آن از A گرفته شده است :

$$B\times A=\{(a،۱)،(a،۲)،(a،۳)،(b،۱)،(b،۲)،(b،۳)\}$$

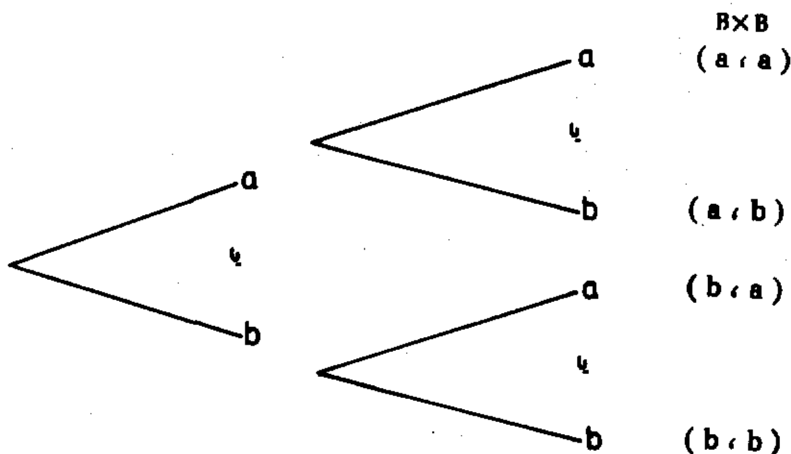
همچنین

$$A\times A=\{(۱،۱)،(۱،۲)،(۱،۳)،(۲،۱)،(۲،۲)،(۲،۳)،(۳،۱)،(۳،۲)،(۳،۳)\}$$

و

$$B\times B=\{(a،a)،(a،b)،(b،a)،(b،b)\}.$$

ب ـ در زیر حاصل ضرب $B \times B$ به صورت نمودار درختی نشان داده شده است .



تمرین

۱ـ در زوجهای زیر، x را به قسمی پیداکنید که دو زوج باهم برابر شوند :

(x ـ ۱ ، x + ۱) و (۲ ، ۴)

۲ـ در زوجهای زیر، x و y را به قسمی پیداکنیدکه دو زوج باهم برابر شوند :

((x+y) ، (x-y)) و (۵ ، ۱)

۳ـ دو مجموعهٔ { p ، q ، r }=A و { ۱ ، ۲ }=B داده شده است حاصل ضربهای زیررا به دست آورید :

$A \times B$ ، $B \times A$ ، $A \times A$ ، $B \times B$

۴ـ سه مجموعهٔ { a ، b }=A و { ۱ ، ۲ ، ۳ }=B و { p ، q ، ۱ }=C داده شده است نشان دهیدکه :

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

۵ـ هرگاه A مجموعهٔ دلخواه وغیرتهی باشد حاصل ضربهای زیررا به دست‌آورید :

$A \times \varnothing$ و $\varnothing \times A$

۶ـ حاصل ضربهای زیر را به دست آورید :

الف ـ { ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ }×{ ۵ ، ۶ }

ب ـ

{x | x عدد طبیعی کوچکتر از ۵ و بزرگتر از ۶ است} × {x | x یک عددطبیعی کوچکتر از ۴ است}

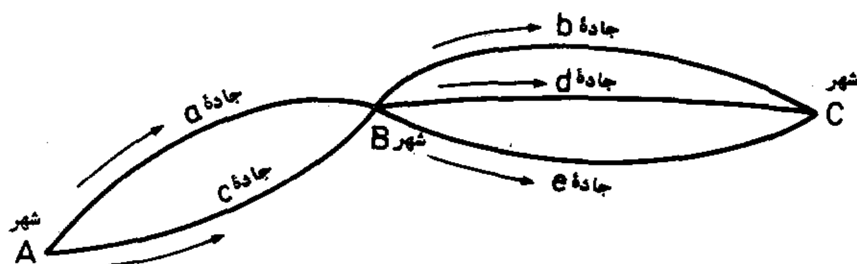
۷ـ مجموعه‌های $A=\{۲ ، ۳\}$ و $B=\{۱ ، ۳ ، ۵\}$ داده شده است . با استفاده از نمودار درختی حاصل‌ضربهای $A\times B$ ، $B\times A$ ، $A\times A$ و $B\times B$ را بنویسید .

۸ـ یك سکهٔ ۵ ریالی و یك تاس را می‌ریزیم . حالات مختلفی را که ممکن است سکه و تاس به زمین بنشیند بنویسید .

۹ـ اگر $A=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴\}$ و $B=\{\varnothing\}$. حاصلضربهای دکارتی $A\times B$ و $B\times A$ را به دست آورید .

رابطه

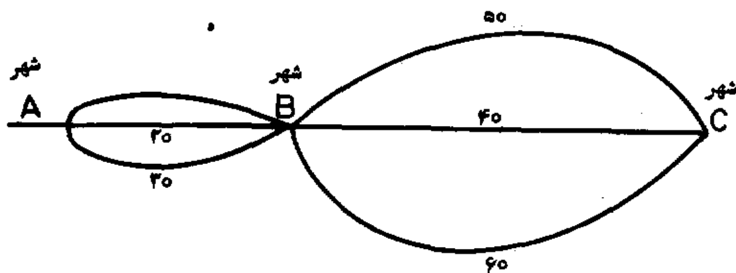
درآغاز فصل مثالی داشتیم که شخصی می‌خواهد از شهر A و از طریق B به شهر C مسافرت کند . همچنین گفتیم که از A به B دو راه و از B به C سه راه موجود می‌باشد :



دیدیدکه مجموعه مسیرهای مختلفی که این شخص برای رفتن از A به C (از طریق B) در اختیار دارد عبارت است از :

$$E\times F=\{(a ، b) ، (a ، d) ، (a ، e) ، (c ، b) ، (c ، d) ، (c ، e)\}$$

بعضی اوقات به همهٔ این مسیرها نیاز نداریم . به عبارت دیگر ، همهٔ عضوهای $E\times F$ مورد احتیاج نیست بلکه با زوجهایی از $E\times F$ کار داریم که هرکدام احیاناً در شرط خاصی صدق کند . مثلا در مورد مثال فوق ، فرض‌کنید طول جاده‌های a و c به ترتیب برابر ۲۰ و ۳۰ کیلومتر و طول راههای b ، d و e به ترتیب ۵۰ ، ۴۰ و ۶۰ کیلومتر باشد .



هرگاه شخصی با ماشین خود مسافرت کند و فقط برای پیمودن ۷۵ کیلومتر راه بنزین داشته باشد می‌خواهیم ببینیم این شخص برای رسیدن از A به C چه مسیرهایی را می‌تواند انتخاب کند تا با کمبود بنزین مواجه نشود . در اینجا فرض می‌شود جاده‌ها باطولشان مشخص شده باشند ؛ در این صورت با توجه به قراردادهای قبلی خواهیم داشت :

E={ ۲۰ ، ۳۰ } ، F={ ۴۰ ، ۵۰ ، ۶۰ }

اگر این شخص بنزین کافی می‌داشت ، همان طورکه دیدید می‌توانست هرزوج از حاصل ضرب زیر را برای مسیرخود انتخاب کند :

E×F={ (۲۰،۴۰) ، (۲۰،۵۰) ، (۲۰،۶۰) ،(۳۰،۴۰) ، (۳۰،۵۰) ،(۳۰،۶۰) }

دراین حاصل‌ضرب‌زوج‌مرتّب (۲۰ ، ۴۰) نشان می‌دهدکه‌مسافر ابتدا جادهٔ۲۰کیلومتری سپس جادهٔ۴۰کیلومتری را می‌پیماید. همچنین این زوج مرتب مشخص می‌سازدکه طول این مسیر برابر ۴۰ + ۲۰ می‌باشد. بنابراین عضوهایی از حاصل‌ضرب دکارتی فوق‌که برای این مسافر مناسب خواهد بود زوجهای مرتبی است‌که درهرکدام ازآنها مجموع دوعضو (مؤلفه) از۷۵کیلومتر بزرگترنمی‌باشد (تابزرگتر)[1] با توجه به مطلب فوق دیده می‌شودکه فقط سه زوج ازمجموعهٔ E×F یعنی:

(۲۰ ، ۴۰) ، (۲۰ ، ۵۰) ، (۳۰ ، ۴۰)

در شرط فوق صدق می‌کند مجموعهٔ این سه زوج مرتب ، یعنی :

{ (۲۰ ، ۴۰) ، (۲۰ ، ۵۰) ، (۳۰ ، ۴۰) }

که زیرمجموعه‌ای از E×F می‌باشد به نام یك رابطه از E در F خوانده شده آن را با $\mathcal{R}$ نشان می‌دهیم :

$\mathcal{R}$={ (۲۰ ، ۴۰) ، (۲۰ ، ۵۰) ، (۳۰ ، ۴۰) }

فرض‌کنید شخص دیگری نیز بخواهد باماشین خود از شهر A به C مسافرت‌کند و تنها برای‌پیمودن ۸۵کیلومتر راه بنزین‌داشته باشد . می‌خواهیم‌ببینیم‌این‌شخص‌چه مسیرهایی می‌تواند انتخاب کندتا بدون‌کمبودبنزین به مقصدبرسد. روشن است‌که هرعضوازحاصل‌ضرب E × F که‌به عنوان مسیر انتخاب شودباید مجموع عضوهای (مؤلفه‌های) آن از۸۵کیلومترکمتر یا حداکثر مساوی آن باشد[2] بااین ترتیب مسیرهایی‌که با زوجهای زیر مشخص می‌شوند برای مسافر دوم مناسب می‌باشد :

۱- هرگاه یك مسیر را در حالت‌کلی به (a،b) نشان دهیم شرط اعمال شده دراینجا عبارت است از $a+b<۷۵$.

۲- دراین حالت شرط اعمال شده عبارت است از $a+b<۸۵$.

$(۲۰،۴۰)$ ، $(۲۰،۵۰)$ ، $(۲۰،۶۰)$ ، $(۳۰،۴۰)$ ، $(۳۰،۵۰)$

مجموعهٔ این زوجهای مرتب نیز ، زیر مجموعه‌ای از $E \times F$ بوده بازیك رابطه از E درFمی‌باشد .

$\mathcal{S} = \{ (۲۰،۴۰) ، (۲۰،۵۰) ، (۲۰،۶۰) ، (۳۰،۴۰) ، (۳۰،۵۰) \}$

در این مثال فرض‌کنید شخص سومی با موتور از A به C مسافرت می‌کند و فقط برای پیمودن ۶۵ کیلومتر راه بنزین دارد آیا این موتور سوار چه مسیرهایی می‌تواند انتخاب‌کند تا بدون‌کمبود بنزین به مقصد برسد ؟ مجموعهٔ $\mathcal{R} = \{(۲۰،۴۰)\}$ که تنها یك مسیر مشخص می‌نماید باز یك رابطه از E در F است .

مثال ـ مجموعهٔ $A = \{ ۲ ، ۴ ، ۶ \}$ را در نظرگرفته حاصل ضرب $A \times A$ را تشکیل می‌دهیم :

$A \times A = \{ (۲،۲)،(۲،۴)،(۲،۶)،(۴،۲)،(۴،۴)،(۴،۶)،(۶،۲)،(۶،۴)،(۶،۶) \}$

اکنون زوجهایی مرتب از $A \times A$ را انتخاب می‌کنیم که «عضو (مؤلفه) اول هرکدام دو واحد ازعضو (مؤلفه) دوم‌آن بزرگترباشد[1]» ، این زوجها عبارتنداز:

$(۴ ، ۲)$ ، $(۶ ، ۴)$

مجموعهٔ این زوجهای مرتب زیرمجموعه‌ای از $A \times A$ بوده یك رابطه در A خوانده می‌شود :

$\mathcal{R} = \{ (۴،۲) ، (۶،۴) \}$

هرکدام از مجموعه‌های زیر نیز یك رابطه در A است .

$\mathcal{R}_۱ = \{ (۲،۴) ، (۴،۴) ، (۶،۲) \}$

$\mathcal{R}_۲ = \{ (۴،۶) ، (۲،۶) ، (۶،۶) \}$

تعریف ـ هرگاه دو مجموعهٔ A و B داده شده باشد هر زیر مجموعه‌ای از $A \times B$ به‌نام یك رابطه از A در B خوانده می‌شود. پس‌اگر $\mathcal{R}$ یك رابطه از A در B باشد ، خواهیم داشت :

$\mathcal{R} \subset A \times B$

در حالت $A = B$ ، $\mathcal{R}$ زیرمجموعه‌ای از $A \times A$ خواهد بود :

$\mathcal{R} \subset A \times A$

در اینجاگفته می‌شود « رابطهٔ $\mathcal{R}$ در A تعریف شده است . »

باید توجه داشت‌که هر رابطه یك مجموعه است . بنابراین تمام مطالبی که در مورد مجموعه‌ها گفته شده است دراینجا نیز درست می‌باشد .

۱ـ اگر زوج دلخواهی از این حاصل ضرب را با $(x،y)$ نشان دهیم شرط اعمال شده عبارت است از $y = x - ۲$

مثال۱ـ دو مجموعهٔ $A=\{۱،۲،۳\}$ و $B=\{p، q\}$ داده شده است ؛ سه رابطه از مجموعهٔ A در B را بنویسید .

حل : ابتدا حاصل‌ضرب دکارتی $A\times B$ را تشکیل می‌دهیم :

$$A\times B=\{ (۱،p) ، (۲،p) ، (۳،p) ، (۱،q) ، (۲،q) ، (۳،q) \}$$

طبق تعریف فوق ، هر زیرمجموعه‌ای از این حاصل‌ضرب یك رابطه از A در B خواهد بود . در زیر سه رابطه نوشته شده است :

$$\mathcal{R}_۱=\{ (۱،p) ، (۲،p) ، (۱،q) ، (۳،q) \}$$

$$\mathcal{R}_۲=\{ (۳،q) \}$$

$$\mathcal{R}_۳=\{ (۲،p) ، (۲،q) ، (۳،p) ، (۳،q) \}$$

آیا می‌توانید سه رابطهٔ دیگر برای این مثال بنویسید ؟ آیا می‌توانید مجموعهٔ مرجع رابطه‌های فوق را بیان کنید ؟

مثال۲ـ مجموعه‌های زیر داده شده است :

A={ سیروس ، بهرام ، احمد }

B={ ابراهیم ، داریوش }

وداریم که :

« سیروس فرزند ابراهیم است » ؛ « بهرام فرزند ابراهیم است » ؛ احمد فرزندداریوش است

هرگاه حروف a ، b ، c ، d و e را به ترتیب برای اسامی احمد ، بهرام ، سیروس و داریوش و ابراهیم به‌کار ببریم خواهیم داشت :

$$A=\{ a ، b ، c \} ، B=\{ d ، e \}$$

هرگاه رابطه‌ای راکه شرط فرزند بودن در مجموعـهٔ انسانها به وجود می‌آورد با $\mathcal{R}_۱$ نشان دهیم، خواهیم داشت :

$$\mathcal{R}_۱=\{ (a ، d) ، (b ، e) ، (c ، e) \}$$

اگر $\mathcal{R}$ یك رابطه از A در B بوده ، $(a \text{ و } b)\in\mathcal{R}$ ، می‌نویسیم $a\mathcal{R}b$[1] و گوییم a و b به وسیلهٔ رابطهٔ $\mathcal{R}$ با هم مربوطند. اگر $(a \text{ و } b)\notin\mathcal{R}$ ، می‌نویسیم $a\not\mathcal{R}b$.

مثلا در مثال فوق داریم :

$a\mathcal{R}_۱d$ و $b\mathcal{R}_۱e$ و $c\mathcal{R}_۱e$

۱ـ در این قرارداد $a\mathcal{R}b$ و $b\mathcal{R}a$ با هم فرق دارد .

مثال ۳ـ اگر $A=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴\}$ پس مجموعهٔ:

$$\mathcal{R}_1=\{(x ، y) \mid x\in A ، y\in A \text{ و } y=x+۲\}$$

یك رابطه در A است . (چرا ؟)

مثال ۴ـ مجموعهٔ زیر یك رابطه درمجموعه اعداد حقیقی است. (چرا ؟) .

$$\mathcal{F}=\{(x ، y) \mid x\in R ، y\in R \text{ و } y=x^۲\}$$

مثال ۵ـ روابط $\mathcal{R}_1$ و $\mathcal{R}_۲$ در مجموعهٔ $A=\{۳ ، ۶ ، ۹\}$ به ترتیب به صورتهای زیر تعریف شده است :

الف ـ $\mathcal{R}_1=\{(x ، y) \mid x\in A ، y\in A \text{ و } x>y\}$

ب ـ $\mathcal{R}_۲=\{(x ، y) \mid x\in A ، y\in A \text{ و } y=x\}$

هريك ازاين رابطه‌ها را به‌صورت مجموعه‌ای اززوجهای مرتب بنویسید :

حل : ابتدا حاصل ضرب $A\times A$ را تشکیل می‌دهیم :

$$A\times A=\{(۳،۳) ،(۳،۶)،(۳،۹)،(۶،۳) ،(۶،۶)،(۶،۹)،(۹،۳)،(۹،۶)،(۹،۹)\}$$

الف ـ زوجهایی ازاین حاصل ضرب را انتخاب می‌کنیم‌که درهرزوج عضو اول بزرگتر از عضو دوم باشد :

$$(۶ ، ۳) ، (۹ ، ۳) ، (۹ ، ۶)$$

پس : $\mathcal{R}_1=\{(۶ ، ۳) ، (۹ ، ۳) ، (۹ ، ۶)\}$

ب ـ زوجهایی از $A\times A$ را می‌نویسیم که درآنها عضو اول برابر عضو دوم باشد :

$$(۳ ، ۳) ، (۶ ، ۶) ، (۹ ، ۹)$$

پس :

$$\mathcal{R}_۲=\{(۳ ، ۳) ، (۶ ، ۶) ،(۹ ، ۹)\} \qquad (۲)$$

دامنه و برد يك رابطه

تعريف ـ مجموعه‌ای که‌از مؤلفه‌های اول زوجهای‌یك رابطه تشکیل می‌شود ، دامنه‌آن رابطه نامیده می‌شود. همچنین‌مجموعه‌ای که ازمؤلفه‌های دوم‌زوجهای‌يك‌رابطه تشکیل‌می‌شود، بـرد آن رابطه نامیده می‌شود . به‌عبارت دیگر اگر $\mathcal{R}$ یك رابطه از A در B باشد ، مجموعهٔ $\{x\in A \mid (x \text{ و } y)\in\mathcal{R}\}$ دامنه $\mathcal{R}$ و مجموعهٔ $\{y\in B \mid (x \text{ و } y)\in\mathcal{R}\}$ برد $\mathcal{R}$ نامیده می‌شوند . یا گاهی دامنه یك‌رابطه را با D وبرد آن‌را با Δ نشان می‌دهیم. باکمی دقت ملاحظه خـواهید کرد‌که در مثال ۵ :

$$\mathcal{R}_1 \text{ دامنه } = \{۶ ، ۹\} \text{ و } \mathcal{R}_1 \text{ برد } = \{۳ ، ۶\}$$

$$\mathcal{R}_۲ \text{ دامنه } = \{۳ ، ۶ ، ۹\} \text{ و } \mathcal{R}_۲ \text{ برد } = \{۳ ، ۶ ، ۹\}$$

اگـر $\mathcal{R}=A\times B$ ، آن‌گاه دامنه و برد $\mathcal{R}$ به ترتیب برابر بـا مجموعه‌هـای A و B خواهند بود .

نمودار یك رابطه

الف ـ نمودار پیکانی ـ رابطهٔ $\mathcal{R}$ به صورت زیر تعریف شده است .

$\mathcal{R}=$ { (شربت،فرید)، (شیر،فرید)، (شربت،فرهاد)، (شیر،رضا)، (چای، رضا) }

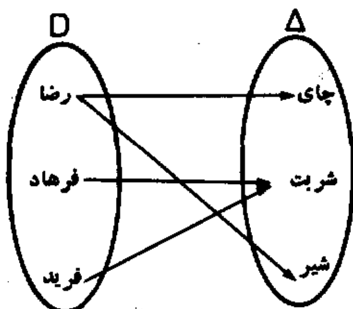
اگرزوج مرتب‌دلخواهی ازاین‌رابطه را با (x ، y) نشان‌دهیم، دراین صورت می‌توان نوشت:

« y آشامیدنی مورد علاقهٔ x است »

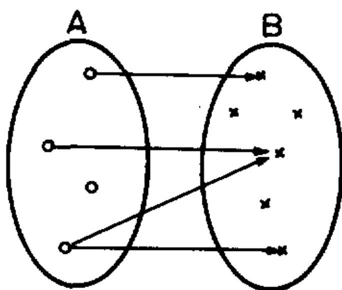
طبق آنچه دربالا دیدید، دامنه وبرد $\mathcal{R}$ برابر است با :

D= { فرید ، فرهاد ، رضا } ؛

Δ= { شربت ، شیر ، چای }



هرگاه‌ازنمودارون‌برای نمایش D و Δ استفاده کرده‌عضوهای D رادریك منحنی‌بسته‌وعضوهای Δ رادرمنحنی بستهٔ دیگربنویسیم . سپس اسم‌هرنفر را با پیکانی به اسم آشامیدنی مورد علاقه‌اش وصل کنیم شکل روبه‌رو به‌دست می‌آیدکه به‌نام نمودار پیکانی $\mathcal{R}$ خوانده می‌شود .



اگررابطهٔ $\mathcal{R}$ از مجموعهٔ A در B تعریف شده باشد ، معمولاً به جای D و Δ از A و B استفاده می‌کنیم‌که دراین صورت لازم نیست از هرعضو A پیکانی خارج ویا به هرعضوی از B پیکانی وارد شود . مانند شکل روبه‌رو :

مثال ۱ ـ رابطهٔ $\mathscr{H}$ در مجموعهٔ A= { ۲ ، ۳ ، ۴ } به صورت زیر تعریف شده است :

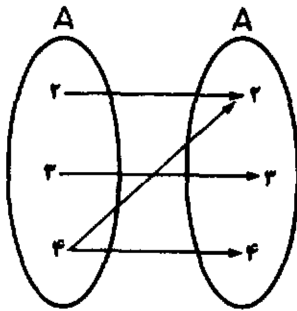
$\mathscr{H}=$ { (x ، y) | x∈A ، y∈A و « x بر y بخش‌پذیر است » }

دامنه و برد $\mathscr{H}$ را تعیین‌کرده نمودار پیکانی آن را رسم‌کنید .

حل : حاصل ضرب دکارتی A×A را تشکیل می‌دهیم :

A×A= { (۲،۲)،(۲،۳) ،(۲،۴) ،(۳،۲)،(۳،۳) ،(۳،۴)،(۴،۲)،(۴،۳)،(۴،۴) }

حال زیرمجموعه‌ای از $A \times A$ می‌نویسیم که درآن عضواول هر زوج مرتب برعضو دوم‌آن بخش‌پذیر باشد .



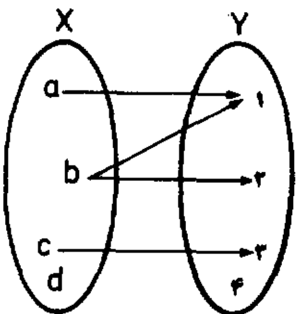
$\mathcal{R}=\{$ (۲،۲) ، (۳،۳) ، (۴،۲) ، (۴،۴) $\}$

دراین‌صورت دامنه و برد آن عبارتند از :

دامنهٔ $\mathcal{R}$ = {۲ ، ۳ ، ۴} ؛ برد $\mathcal{R}$ = {۲ ، ۳ ، ۴}

نمودار $\mathcal{R}$ در روبه رو رسم شده‌است :

مثال ۲ ـ رابطهٔ $\mathcal{R}$ ازمجموعهٔ X در Y طبق نمودار روبه‌رو تعریف شده است، این‌رابطه را با زوجهای‌مرتب نشان دهید .



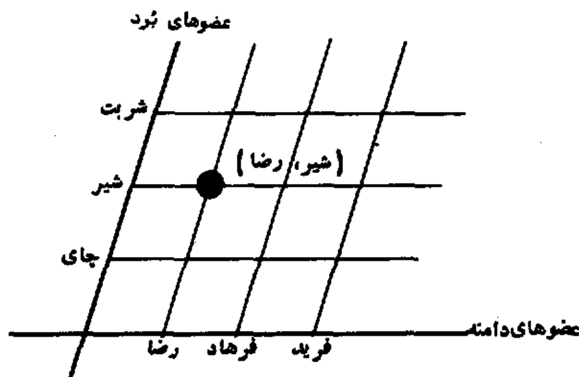
حل : در اینجا رابطهٔ $\mathcal{R}$ از زوجهای مرتبی تشکیل می‌شود که در نمودار آن از عضواول هرزوج اقلاً یك پیکان خارج شده وبه عضو دوم آن زوج ختم می‌شود . بنا براین رابطهٔ مزبور عبارت است از:

$R=\{$ (a ، ۱) ، (b ، ۱) ، (b ، ۲) ، (c ، ۳) $\}$

ب ـ **نمودار دکارتی** ـ روش دیگر برای نمایش رابطهٔ :

$\mathcal{R}=\{$ (چای ، رضا) ، (شیر ، رضا) ، (شربت، فرهاد) ، (شیر ، فرید) ، (شربت، فرید) $\}$

استفاده از نمودار دکارتی یا نمودار مختصاتی است . بدین ترتیب‌که دو خط متقاطع را در صفحه رسم‌کرده (شکل زیر) روی یکی در فواصل معین عضوهای دامنه :

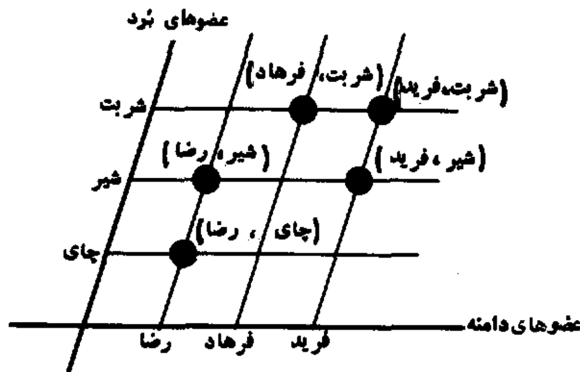


{ فرید ، فرهاد ، رضا }

وروی دیگری بـه فواصل معین عضوهای بـرد :

{ شربت ، شیر ، چای }

را نقل می‌کنند ؛ سپس از نقاط مشخص شده خطوطی موازی با دوخط اصلی رسم کرده نقطه‌های تلاقی این خطهارا نقاط نظیر زوجهای رابطه می‌گیرند . مثلاً نقطهٔ نظیر زوج (شیر، رضا) در محل تلاقی دو خطی قرار گرفته که ازنقاط رضا و شیرموازی‌با دوخطاصلی رسم شده است. به‌همین‌ترتیب‌سایرنقاط متناظر با زوجهای $\mathcal{R}$ به‌دست می‌آید (شکل زیر).



این شکل را دستگاه مختصات نامیده نقطهٔ نظیر زوج (شیر، رضا) را در صفحهٔ نموداراین زوج ومجموعهٔ این نقاطرا نمودار مختصاتی یا نمودار دکارتی رابطهٔ $\mathcal{R}$ می‌خوانند .

ازنمودار مختصاتی‌بیشتر برای‌نمایش رابطه‌هایی‌که عضوهای‌آنها زوجهای مرتب‌ازاعداد حقیقی باشند استفاده می‌شود. به‌عبارت دیگر، درنمودار مختصاتی درصفحه‌یک‌تناظر یك به‌یك بین نقاط صفحه و زوجهای مرتب از اعدادحقیقی وجود دارد. اگـر یکی ازدوخط اصلی را به طور افقی ودیگری را عمود بـرآن در صفحه رسم‌کنیم شکل حاصل را دستگاه مختصات قـائم می‌نـامیم . در دستگاه مختصات قائم ، محل تلاقی دوخط اصلی را نظیر زوج (۰ ، ۰) گرفته آن را با حرف O مشخص می‌کنند ، سپس روی خط افقی‌که به نام محور x ها یامحور طولها خوانده می‌شود ، و در سمت راست O با انتخاب واحد مناسب اعداد مثبت و درسمت چپ O ، اعداد منفی دامنه را نقل می‌کنند. به‌همین‌ترتیب روی خط قائم‌که به‌نام محور y ها یا محور عرضها نامیده می‌شود ، درطرف بالای O اعداد مثبت ودرطرف پایین O اعداد منفی بُرد را نقل‌می‌کنند. آن‌گاه نمودار نظیر هرزوج را مطابق‌آنچه که گفته شد به‌دست می‌آورند. به مثالهای زیر توجه‌کنید :

مثال ۱ـ رابطهٔ زیر درمجموعه اعداد درست تعریف شده است .

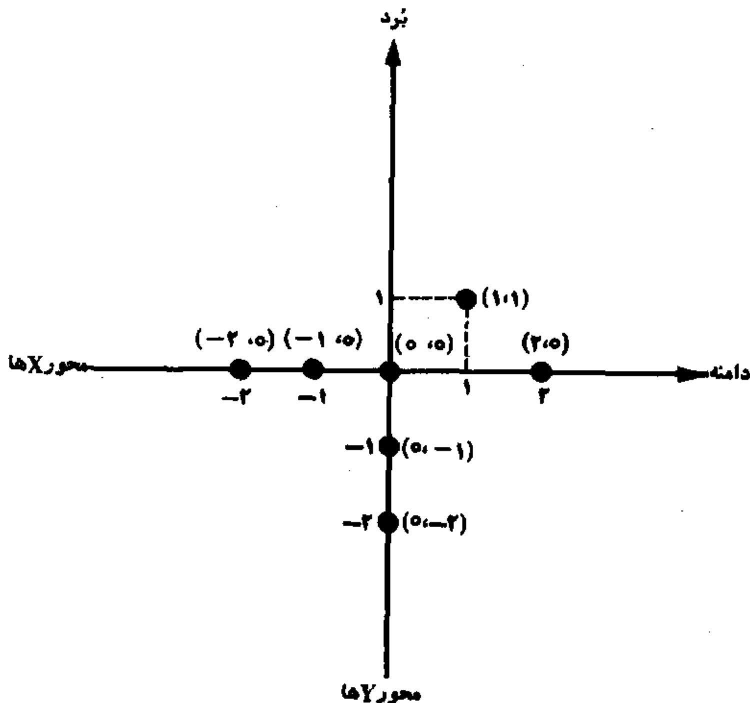
$$\mathcal{F}=\{ (-۲،۰)، (-۱،۰)، (۰،۰)، (۱،۱)، (۲،۰)، (۰،-۱)، (۰،-۲) \}$$

مطلوب است تعیین دامنه وبرد ورسم نمودار مختصاتی آن :

حل : ابتدا دامنه و برد $\mathcal{G}$ را طبق‌آنچه‌که گفته شد می‌نویسیم :

$\mathcal{G}$ دامنهٔ $= \{-۲، -۱، ۰، ۱، ۲\}$ ، $\mathcal{G}$ برد $= \{۰، ۱، -۱، -۲\}$

آن‌گاه نمودار مختصاتی $\mathcal{G}$ را مطابق‌آنچه‌که دربالا توضیح داده شد رسم می‌کنیم (شکل زیر)



مثال ۲ - رابطه : $\mathcal{R} = \{(x ، y) \ \ x + y = ۱\}$ در مجموعهٔ اعداد درست تعریف شده است .

مطلوب است تعیین دامنه وبرد ورسم نمودار مختصاتی $\mathcal{R}$.

حل : طبق‌آنچه گفته‌شده‌است داریم : $\mathcal{R} \subset Z \times Z$ ؛ حال زوجهایی از$Z \times Z$ را انتخاب می‌کنیم‌که مجموع عضوهای‌آن برابر یك باشد :

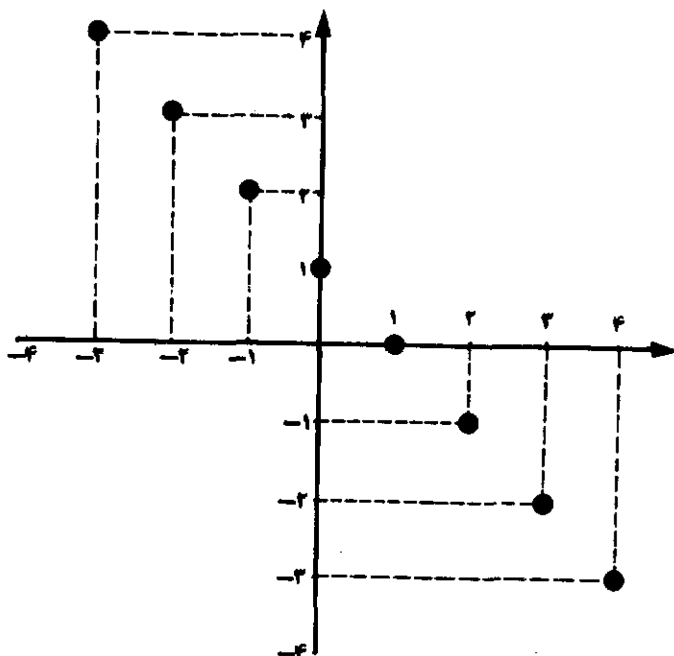
$$\mathcal{R} = \{\ldots،(-۴،۵)،(-۳،۴)،(-۲،۳)،(-۱،۲)،(۰،۱)،(۱،۰)،(۲،-۱)،(۳،-۲)،\ldots\}$$

دامنه و حوزهٔ این رابطهٔ برابر است با :

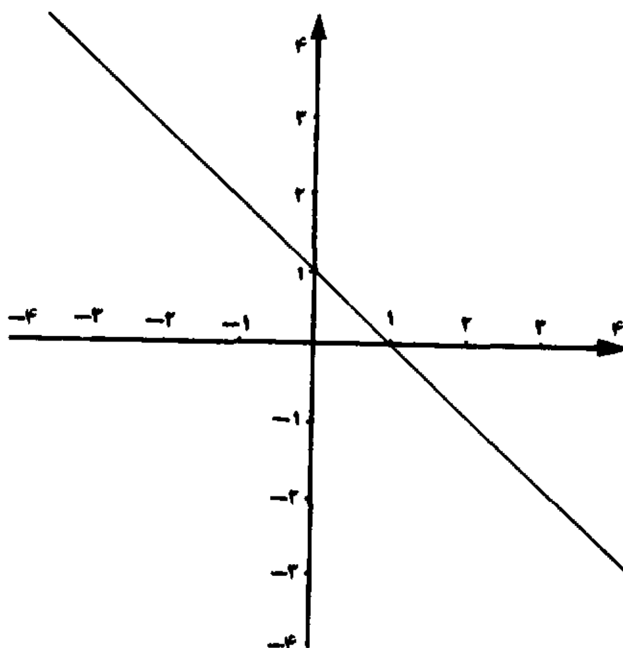
$\mathcal{R}$ دامنهٔ $= \{\ldots، -۴، -۳، -۲، -۱، ۰، ۱، ۲، ۳، \ldots\}$

$\mathcal{R}$ برد $= \{\ldots، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰، -۱، -۲، \ldots\}$

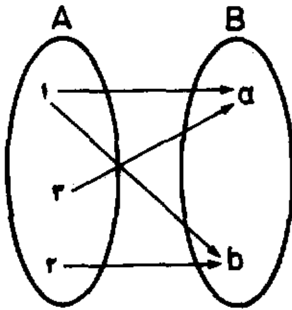
هرگاه نمودارمختصاتی تمام زوجهای $\mathcal{R}$ را درصفحه رسم‌کنیم،نقطه‌هایی به تعدادنامتناهی به‌دست می‌آیدکه‌همهٔ‌آنها بریك خط راست‌واقعند. قسمتی‌ازاین نمودار درشکل رسم شده‌است .



اگررابطهٔ $\mathcal{R}=\{(x , y) \mid x+y=1\}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شده بود دراین صورت نمودار این رابطه یك خط راست پیوستهٔ نامحدود به صورت زیر می‌بود :



رابطهٔ وارون (معکوس)

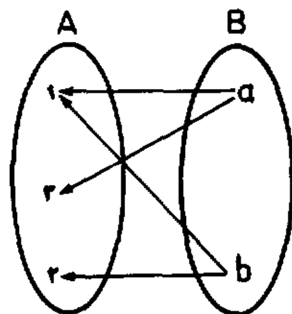


رابطهٔ $\mathcal{R}$ از مجموعهٔ $A=\{۱،۲،۳\}$ در مجموعهٔ $B=\{a، b\}$ به صورت زیر تعریف شده است :

$\mathcal{R}=\{(۱، a)، (۲، b)، (۳، a)، (۱، b)\}$

هرگاه عضوهای هرکدام از زوجهای مرتب متعلق به $\mathcal{R}$ را جـا به جا کنیم رابطهٔ جـدیدی به صورت زیـر به دست می‌آیدکه از B در A می‌باشد :

$\{(a، ۱)، (b، ۲)، (a، ۳)، (b، ۱)\}$



رابطهٔ جدید را وارون رابطهٔ $\mathcal{R}$ خوانـده آن را با $\mathcal{R}^{-۱}$ نمایش می‌دهیم :

$\mathcal{R}^{-۱}=\{(a، ۱)، (b، ۲)، (a، ۳)، (b، ۱)\}$

تعریف ــ هرگاه $\mathcal{R}$ رابطه‌ای از A در B باشد ، رابطهٔ وارون $\mathcal{R}$ را بـا $\mathcal{R}^{-۱}$ نشان داده و بصورت زیـر تعریف میکنیم :

$\mathcal{R}^{-۱}=\{(b،a) \mid (a،b)\in\mathcal{R}\}$

با توجه به مطالب فوق می‌توان گفت که هرگاه $\mathcal{R}^{-۱}$ وارون $\mathcal{R}$ باشد داریم :

دامنهٔ $\mathcal{R}^{-۱}$ = برد $\mathcal{R}$ و برد $\mathcal{R}^{-۱}$ = دامنهٔ $\mathcal{R}$

تمرین

۱ـ دو مجموعهٔ $X=\{۱،۲،۳،۴\}$ و $Y=\{۱،۳،۵\}$ داده شده‌اند . الف : حاصل ضرب دکارتـی $X\times Y$ را بنویسید . ب : رابطهٔ $\{(x، y)\in X\times Y \mid x>y\}$ از X در Y را به صورت زوجهای مرتب نشان دهید .

۲ـ رابطهٔ : $\{(x، y) \mid x+y=۴\}$ در مجموعهٔ اعـداد درست تعریف شده است . الف: این رابطه را به‌صورت مجموعـه‌ای از زوجهای مرتب بنویسید. ب: دامنه و برد آنرا بنویسید .

۳ـ رابطهٔ $\mathcal{R}$ در مجموعهٔ $A=\{a، b، c، d\}$ به صورت زیر تعریف شده است :

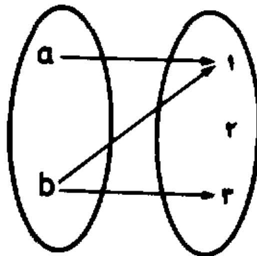
$\mathcal{R}=\{(a، b)،(b، a)،(b، b)، (b، d)،(c، c)،(d، a)، (d، b)\}$

الف ـ تحقیق کنید کدام یك ازگزاره‌های زیر درست است :

$c\mathcal{R}b$ ، $d\not\mathcal{R}a$ ، $a\mathcal{R}c$ ، $b\not\mathcal{R}b$ ، $b\mathcal{R}d$ ، $a\mathcal{R}b$

ب ـ هرگاه داشته باشیم : $\mathcal{C}=\{x\in A \mid (x،b)\in\mathcal{R}\}$ ، مجموعهٔ $\mathcal{C}$ را مشخص نمائید.

۴ـ رابطهٔ $\mathcal{R}$ با نمودار زیر تعریف شده است :



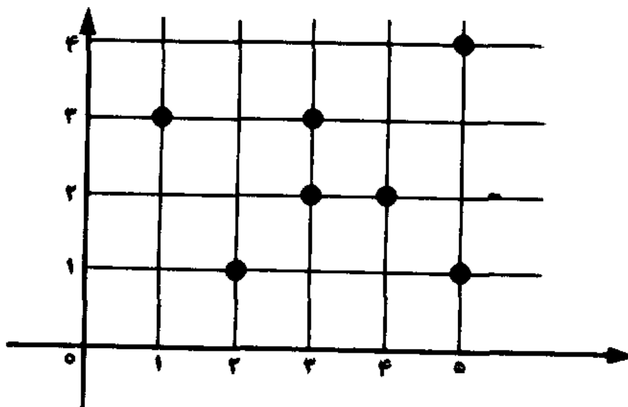
این رابطه را به صورت مجموعه‌ای اززوجهای مرتب بنویسید .

۵- رابطه $\{(x،y) \mid x^۲+y^۲=۱۳\}$ در مجموعهٔ $A=\{-۳، -۲، ۱، ۲، ۳\}$ تعـریف شده است .

الف: این رابطه را به‌صورت مجموعه‌ای از زوجهای مرتب بنویسید. ب: دامنه و بـرد این رابطه را مشخص‌کنید. ج: نمودار مختصاتی آن را رسم‌کنید .

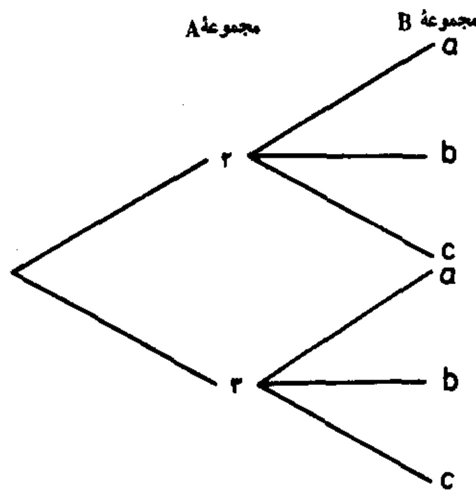
ـ رابطهٔ $\mathcal{R}=\{(x،y) \mid x^۲+y^۲\leqslant ۹\}$ ، در مجموعهٔ اعداد درست تعریف شده است . نمودار مختصاتی آن را رسم‌کنید .

۶ـ رابطهٔ $\mathcal{R}$ در مجموعهٔ $T=\{۱،۲،۳،۴،۵\}$ طبق نمودار زیر تعریف شده است :



این رابطه رابه‌صورت مجموعه‌ای از زوجهای‌مرتب‌بنویسید.

۷- رابطهٔ $\mathcal{R}$ طبق نمودار زیر تعریف شده است :



این رابطه را به صورت مجموعه‌ای از زوجهای مرتب بنویسید .

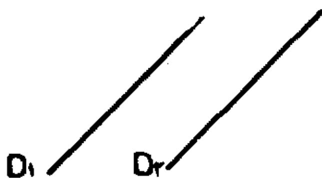
۸- هریك از رابطه‌های زیر ، از مجموعهٔ $X = \{۱ ، ۲ ، ۳\}$ در مجموعهٔ $Y = \{۱،۲،۳،۴\}$ تعریف شده است . این رابطه‌ها را به صورت مجموعه‌ای اززوجهای مرتب نشان دهید .

$$\mathcal{R}_۱ = \{(x،y) \mid y = x\} ؛ \mathcal{R}_۲ = \{(x،y) \mid x + y = ۴\} \cap \{(x،y) \mid y = ۴\}$$
$$\mathcal{R}_۳ = \{(x،y) \mid y < x\} \cup \{(x،y) \mid y > x\} \cup \{(x،y) \mid y = x\}$$

۹- رابطهٔ $\mathcal{R} = \{(x،y) \mid y = ۲x\}$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی‌تعریف شده است $\mathcal{R}^{-۱}$ را مشخص‌کنید .

خواص بعضی از رابطه‌ها

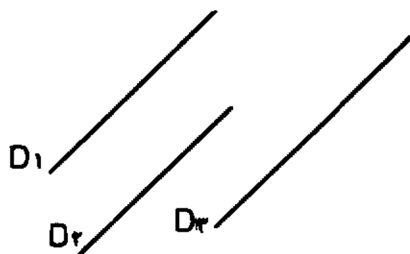
رابطهٔ توازی را درمجموعهٔ خطوط درنظر بگیرید. هرگاه $D_۱$ ، $D_۲$ و $D_۳$ سه‌خط دلخواه باشند ، طبق آنچه در هندسه خوانده‌اید :



الف ـ هرخط باخودش موازی است .

$$D_۱ \parallel D_۱$$

ب ـ اگر خط $D_۱$ موازی $D_۲$ باشد ، آن‌گاه



خط D_2 نیزموازی D_1 خواهد بود وبالعکس .

$D_1 \parallel D_2 \Longleftrightarrow D_2 \parallel D_1$

ج ـ اگرخط D_1 موازی D_2 و خط D_2 موازی D_3 باشد ،آن‌گاه خط D_1 موازی D_3 است .

$(D_1 \parallel D_2 \wedge D_2 \parallel D_3) \Rightarrow D_1 \parallel D_3$

رابطهٔ تساوی را در مجموعهٔ اعداد درنظر بگیرید . هرگاه a ، b و c سه عدد دلخواه باشند ، طبق آنچه‌که درحساب خوانده‌اید :

الف ـ هرعدد باخودش برابر است : $a=a$

ب ـ اگر عدد a برابر b باشد ، آن‌گاه عدد b نیز برابر a است وبالعکس .

$(a=b) \Longleftrightarrow (b=a)$

ج ـ اگرعدد a مساوی b وعدد b مساوی c باشد ، آن‌گاه عدد a با c مساوی خواهدبود:

$(a=b \wedge b=c) \Rightarrow (a=c)$

رابطهٔ تشابه را در مجموعهٔ شکلهای هندسی در نظر بگیرید . این رابطه نیز دارای سه خاصیت الف ، ب و ج مشروح دربالاست . آیا رابطهٔ دیگری را می‌شناسید که دارای این سه خاصیت باشد؟ در اینجا ما ابتدا سه خاصیت الف ، ب و ج رابطه‌ها را با دقت مورد مطالعه قرارداده سپس از رابطه‌هایی‌که دارای این سه خاصیت باهم باشند بحث خواهیم‌کرد.

خاصیت الف ـ دیدیدکه رابطهٔ توازی در مجموعهٔ خطوط دارای این خاصیت است‌که هر خط با خودش موازی است. به عبارت دیگر، اگر D_1 یك خط درصفحه باشد، پس

$D_1 \parallel D_1$

به‌طورکلی هرگاه رابطهٔ $\mathcal{R}$ در مجموعهٔ A دارای این خاصیت باشدکه هرعضو A با خودش به وسیلهٔ رابطهٔ $\mathcal{R}$ مربوط شود، دراین صورت‌گفته می‌شود $\mathcal{R}$ درمجموعهٔ A دارای خاصیت بازتابی است. این مطلب را با نمادهای ریاضی به صورت زیر بیان می‌کنیم :

$\forall a \in A \,,\, (a,a) \in \mathcal{R}$ یا $a\mathcal{R}a$

مثال ۱ـ رابطهٔ: $\mathcal{R}=\{(۱،۱)،(۱،۳)،(۲،۲)،(۲،۳)،(۳،۴)،(۴،۴)،(۵،۵)\}$

درمجموعهٔ $A=\{۱،۲،۳،۴،۵\}$ تعریف شده است. آیارابطهٔ $\mathcal{R}$ خاصیت‌بازتابی‌دارد.

حل : در این مثال $۳\in A$ ولی $(۳ ، ۳) \notin \mathcal{R}$ ، بنابراین طبق آنچه گفته شد $\mathcal{R}$ دارای خاصیت بازتابی نیست اما رابطهٔ $\mathcal{R}_1$ که در مجموعهٔ A به صورت زیر تعریف شده است.

$\mathcal{R}_1=\{(۱،۱)،(۱،۳)،(۲،۲)،(۲،۳)،(۳،۴)،(۳،۳)،(۴،۴)،(۵،۵)\}$

دارای خاصیت بازتابی است .

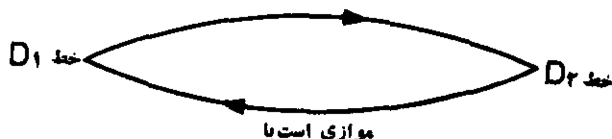
مثال ۲ ـ رابطهٔ « x برای y کار می‌کند » درمجموعهٔ انسانها تعریف شده است. آیااین رابطه دارای خاصیت بازتابی است ؟

حل : چون بعضی افراد برای خودشان و بعضی افراد برای دیگران کار می‌کنند ، لذا رابطهٔ مزبوردارای خاصیت بازتابی نیست .

خاصیت ب ـ یکی دیگر از خواصی که در مورد دو خط موازی D_1 و D_2 بیان کردیم عبارت بود از :

اگر خط D_1 موازی D_2 باشد ، آن‌گاه خط D_2 نیز موازی D_1 است وبالعکس .

$$D_1 \parallel D_2 \Longleftrightarrow D_2 \parallel D_1$$



ازنظر نموداری این رابطه را به صورت رو به رونشان می‌دهیم :

این خاصیت را خاصیت تقارنی رابطهٔ توازی می‌خوانند .

فرض‌کنید $\mathcal{R}$ رابطه‌ای در A باشد ؛ گوییم رابطهٔ $\mathcal{R}$ دارای خاصیت تقارنی است هرگاه برای هر a و b متعلق به A داشته باشیم :

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow b\mathcal{R}a \quad \text{یا} \quad (a,b)\in\mathcal{R} \Longleftrightarrow (b,a)\in\mathcal{R}$$

رابطهٔ $\subset$ درخانوادهٔ مجموعه‌ها خاصیت تقارنی ندارد . زیرا برای دو مجموعهٔ دلخواه A و B از $A\subset B$ نمی‌توان نتیجه گرفت که $B\subset A$ و بالعکس ، یعنی این‌که :

$$A\subset B \not\Longleftrightarrow B\subset A$$

همچنین رابطهٔ « $<$ » در مجموعهٔ اعداد حقیقی خاصیت تقارنی ندارد . زیرا برای دو عدد دلخواه a و b داریم :

$$a<b \not\Longleftrightarrow b<a$$

همچنین رابطهٔ « x برادر y است » درمجموعهٔ انسانها دارای خاصیت تقارنی نیست زیرا اگر x برادر y باشد ، ممکن است y خواهر x باشد. ولی همین رابطه درمجموعهٔ مردان دارای خاصیت تقارنی است . طبق آنچه راجع به رابطهٔ معکوس دیدید می‌توان گفت که رابطهٔ $\mathcal{R}$ در مجموعه A دارای خاصیت تقارنی است اگر وفقط اگر[1] : $\mathcal{R}^{-1}=\mathcal{R}$

خاصیت ج ـ خاصیت دیگری‌که در رابطهٔ توازی دو خط بحث شد عبارت بود از :

هرگاه خط D_1 موازی D_2 و خط D_2 موازی D_3 باشد ، آن‌گاه D_1 موازی D_3 است .

$$(D_1\parallel D_2)\wedge(D_2\parallel D_3)\Rightarrow D_1\parallel D_3$$

در ریاضیات ودرزندگی روزمره روابط بسیاری‌وجود داردکه دارای‌این خاصیت‌می‌باشند.

۱ـ تعریف تساوی دو رابطه مثل تعریف تساوی دو مجموعه است .

مثلا رابطهٔ «x هم قد y است» درمجموعهٔ انسانها دارای همین‌خاصیت می‌باشد. این‌خاصیت‌را خاصیت ترایایی رابطهٔ توازی و یا رابطهٔ «x هم قدy است» خوانده می‌شود .

فرض‌کنید $\mathcal{R}$ رابطهٔ مفروضی در مجموعهٔ A باشد، گوییم رابطهٔ $\mathcal{R}$ دارای خاصیت ترایایی است هرگاه برای هر a ، b و c متعلق به A داشته باشیم :

$$(a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c \text{ یا } ((a , b)\in\mathcal{R} \wedge (b , c)\in\mathcal{R}) \Rightarrow (a , c) \in\mathcal{R}$$

رابطهٔ «$<$» در مجموعهٔ اعدادحقیقی دارای خاصیت‌ترایایی است. زیرا برای هرسه‌عدد a ، b و c طبق آنچه درجبر وحساب خوانده‌اید داریم :

$$(a<b \wedge b<c) \Rightarrow (a<c)$$

همچنین رابطهٔ «$\subset$» درخانوادهٔ مجموعه‌ها دارای خاصیت ترایایی است. زیرا برای هر سه مجموعه‌A و Bو C داریم:

$$(A\subset B \wedge B\subset C) \Rightarrow (A\subset C)$$

آیا رابطهٔ «x مقسوم علیه‌y است» درمجموعهٔ اعدادطبیعی دارای خاصیت ترایایی‌است.

رابطهٔ هم‌ارزی

دیدیدکه رابطهٔ توازی درمجموعهٔ خطوط دارای سه خاصیت بازتابی ، تقارنی و ترایایی است. این رابطه مثالی ازیك رابطهٔ هم ارزی است .

تعریف ـ رابطهٔ $\mathcal{R}$ در مجموعهٔ A تعریف شده است . گوییم $\mathcal{R}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی در A است هرگاه برای هر a ، b و c متعلق به A :

الف‌ـ $\mathcal{R}$ دارای خاصیت بازتابی باشد، یعنی: $\forall a\in A , (a,a)\in\mathcal{R}$

ب ـ $\mathcal{R}$ دارای خاصیت تقارنی باشد . یعنی: $\forall a, b\in A , (a , b) \in\mathcal{R} \Leftrightarrow (b , a) \in\mathcal{R}$

ج‌ـ $\mathcal{R}$ دارای خاصیت ترایایی باشد، یعنی :

$$\forall a,b , c\in A , ((a , b) \in\mathcal{R} \wedge (b , c)\in\mathcal{R}) \Rightarrow (a , c)\in\mathcal{R}$$

مثال ۱ ـ رابطهٔ « x متشابه y است » در مجموعهٔ شکلهای هندسی یك رابطهٔ هم‌ارزی است . زیرا :

الف‌ـ هرشکل با خودش متشابه است (خاصیت بازتابی)

ب ـ اگرشکلx متشابه yباشد،آن‌گاه‌شکل y نیزمتشابه x است‌وبالعکس (خاصیت‌تقارنی)

ج ـ اگرشکل x متشابه y و y متشابه z باشد ، آن‌گاه شکل x متشابه z است (خاصیت ترایایی) .

مثال ۲ ـ رابطهٔ $\mathcal{R}$ در مجموعهٔ A={ ۱،۳،۵،۷ } به صورت زیر تعریف شده است :

$$\mathcal{R}=\{ (۱،۱),(۳،۳),(۵،۵),(۷،۷),(۳،۵),(۵،۳),(۷،۵),(۵،۷),(۳،۷),(۷،۳) \}$$

آیا $\mathcal{R}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی است ؟

حل : الف ـ خاصیت بازتابی: دراین رابطه داریم :

$$(۱،۱)\in\mathcal{R} ، (۳،۳)\in\mathcal{R} ، (۵،۵)\in\mathcal{R} ، (۷،۷)\in\mathcal{R}$$

یعنی هرعضو A با خودش بوسیلهٔ رابطهٔ $\mathcal{R}$ مربوط است. پس $\mathcal{R}$ دارای خاصیت بازتابی است.

ب ـ خاصیت تقارنی :

$$(۳،۵)\in\mathcal{R}\Leftrightarrow(۵،۳)\in\mathcal{R} ؛ (۷،۵)\in\mathcal{R}\Leftrightarrow(۵،۷)\in\mathcal{R}$$

$$(۳،۷)\in\mathcal{R}\Leftrightarrow(۷،۳)\in\mathcal{R}$$

پس طبق آنچه گفته شد $\mathcal{R}$ دارای خاصیت تقارنی است .

ج ـ خاصیت ترایایی دراین رابطه داریم :

$$((۳،۵)\in\mathcal{R}\wedge(۵،۳)\in\mathcal{R})\Rightarrow(۳،۳)\in\mathcal{R}$$

$$((۷،۵)\in\mathcal{R}\wedge(۵،۳)\in\mathcal{R})\Longrightarrow(۷،۳)\in\mathcal{R}$$

$$((۳،۷)\in\mathcal{R}\wedge(۷،۵)\in\mathcal{R})\Longrightarrow(۳،۵)\in\mathcal{R}$$

یعنی $\mathcal{R}$ دارای خاصیت ترایایی است. $\mathcal{R}$ دارای سه خاصیت، بازتابی، تقارنی و ترایایی بوده لذا یك رابطهٔ هم‌ارزی است .

آیارابطهٔ: « x هم‌سن y است » یا « x هم‌قد y است » یا « x همنام y است » یا« x هم گروه خونی y است» در مجموعهٔ انسانها، یك رابطهٔ هم‌ارزی است. چرا ؟

دسته‌های هم‌ارزی[1]

رابطهٔ « هم‌کلاس بودن » را در مجموعهٔ دانش‌آموزان یك دبیرستان درنظر گرفته‌آن را با $\mathcal{R}$ نشان می‌دهیم . این رابطه دارای سه خاصیت زیر است :

الف ـ هردانش‌آموز با خودش هم‌کلاس است. (خاصیت بازتابی)

ب ـ اگر x هم‌کلاس y باشد ،آن‌گاه y نیزهم‌کلاس x است وبالعکس . (خاصیت‌تقارنی)

ج ـ اگرx هم‌کلاس y و y هم‌کلاس z باشد، آن‌گاه x هم‌کلاس z است. (خاصیت‌ترایایی)

پس رابطهٔ « هم‌کلاس‌بودن » یك رابطهٔ هم‌ارزی درمجموعهٔ دانش‌آموزان این دبیرستان است. اگر رضا یکی‌از دانش‌آموزان این دبیرستان باشد، واضح است‌که مجموعهٔ‌دانش‌آموزانی از دبیرستان‌که با رضا بوسیله رابطهٔ بالا مربوطند، مجموعهٔ تمام دانش‌آموزانی است‌که با او هم‌کلاس می‌باشند . در ریاضیات این‌کلاس را دستهٔ هم‌ارزی رضا نامیده آن را با « [رضا] » نشان می‌دهند .

۱ـ طبقات هم‌ارزی نیزگفته شده است .

مجموعهٔ تمام دانش آموزانی که با رضا هم کلاس میباشند = [رضا]

هریك از دانش‌آموزان دستهٔ هم‌ارزی رضا (هم‌کلاسهای او) به‌نام یك عضو این دسته خوانده می‌شود . و رضا یك نمایندهٔ دستهٔ هم‌ارزی رضاست . هرگاه حسین یکی‌از هم‌کلاسهای رضا باشد دراین صورت دسته‌های هم‌ارزی: [رضا] و [حسین] باهم‌برابرهستند . زیرا ، هردو دسته مجموعهٔ دانش‌آموزانی را نشان می‌دهند که با رضا و حسین در یك کلاس درس می‌خوانند . اگر مجموعهٔ دانش‌آموزان این‌کلاس را B بنامیم خواهیم داشت :

[حسین] = B = [رضا]

اگر فرزاد دانش‌آموز دیگری از این دبیرستان بوده ومتعلق به دستهٔ هم‌ارزی B نباشد، روشن است‌که هیچ‌کدام ازهم‌کلاسهای او نیز متعلق به دستهٔ B نخواهدبود. این دانش‌آموزان نیز دستهٔ هم‌ارزی دیگری درمجموعهٔ دانش‌آموزان دبیرستان تشکیل می‌دهند :

مجموعه تمام دانش‌آموزانی‌که با فرزاد هم‌کلاس میباشند = [فرزاد]

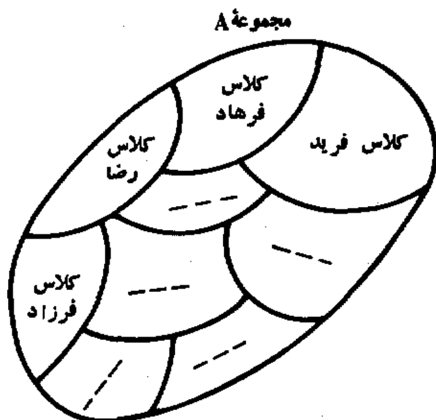
طبق توضیحات فوق مجموعه‌های [رضا] و [فرزاد] جدا ازهم می‌باشند .

دو دانش‌آموز دیگر این دبیرستان را به نام فرهاد و فرید در نظرگرفته فرض‌کنید آنها هم‌کلاس نبوده و هیچ‌کدام با رضا یا فرزاد نیز هم‌کلاس نباشند ، در نتیجه این دو دانش‌آموز متعلق به دو دستهٔ هم‌ارزی دیگر خواهند بود:

مجموعه تمام دانش‌آموزانی‌که با فرهاد هم‌کلاس‌میباشند = [فرهاد]

مجموعه تمام دانش‌آموزانی‌که با فرید هم‌کلاس میباشند = [فرید]

هرگاه مجموعهٔ دانش‌آموزان دبیرستان مورد بحث را با A نمایش دهیم، رابطهٔ هم‌ارزی « هم‌کلاس بودن » در A ، این مجموعه را به دسته‌های هم‌ارزی (دانش آموزان هم‌کلاس) تقسیم می‌کند به طوری که داریم :



۱- هیچ‌کدام از این دسته‌ها تهی نیست .

۲- این‌دسته‌های‌هم‌ارزی دو به‌دو جدا ازهم می‌باشند .

۳- اجتماع تمام دسته‌های‌هم‌ارزی برابر مجموعهٔ A است .

و این سه خاصیتی است که سال گذشته برای‌افرازمجموعهٔ A گفته شد. بنابراین می‌توان گفت :

هررابطهٔ هم‌ارزی در مجموعهٔ مفروض A ، این مجموعه را به دسته‌های هم‌ارزی افراز

می‌کند .

مجموعه‌ای را کـه از همهٔ این دسته‌های هـم‌ارزی تشکیل شده است با $A/_{\mathcal{R}}$ نمایش می‌دهند درمثال بالا خواهیم داشت :

$A/_{\mathcal{R}}=$ { [رضا] ، [فرید] ، [فرزاد] ، . . . [فرهاد] }

مثال ـ همان طورکه درحساب و جبر سال قبل دیدید رابطهٔ $a \equiv b$ (با میزان ۳) در مجموعهٔ اعداد صحیح نسبی Z یك رابطهٔ هم‌ارزی است در نتیجه ، این رابطه مجموعهٔ Z را به دسته‌های هم‌ارزی زیر افراز می‌کند :

$$[\,۰\,] = \{\ldots، -۶، -۳، ۰، ۳، ۶، ۹، \ldots\}$$
$$[\,۱\,] = \{\ldots، -۵، -۲، ۱، ۴، ۷، ۱۰، \ldots\}$$
$$[\,۲\,] = \{\ldots، -۴، -۱، ۲، ۵، ۸، ۱۲، \ldots\}$$

مجموعه‌ای راکه ازهمهٔ این دسته‌های هم‌ارزی تشکیل شده است با $\mathcal{Z}/_{\equiv}$ نمایش‌می‌دهند.

$$\mathcal{Z}/_{\equiv} = \{[\,۰\,]، [\,۱\,]، [\,۲\,]\}$$

رابطهٔ ترتیب

رابطهٔ « $\leqslant$ » را درمجموعهٔ اعداد حقیقی زیاد به‌کار برده‌اید . این رابطه دارای سه خاصیت زیر است :

الفـ $a \leqslant a$ (خاصیت‌بازتابی)

ب ـ اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant a$ ، آن‌گاه $a = b$ (خاصیت ؟)

جـ اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant c$ ، آن‌گاه $a \leqslant c$ (خاصیت ترایایی)

رابطهٔ « $\leqslant$ » دارای خواص بـازتابی و ترایایی بوده ولی به جای خاصیت تقارنی دارای خاصیت دیگری است‌که هنوز اسمی برای آن نمی‌دانید .

رابطهٔ زیرمجموعه بودن « $\subset$ » را در خانوادهٔ مجموعه‌ها درنظر بگیرید ، این رابطه نیز دارای همان سه خاصیت است.

الفـ $A \subset A$ (خاصیت بازتابی)

ب ـ اگر $A \subset B$ و $B \subset A$ ، آن‌گاه $A = B$. (خاصیت ؟)

جـ اگر $A \subset B$ و $B \subset C$ ، آن‌گاه $A \subset C$. (خاصیت ترایایی)

رابطهٔ «$\subset$» هم دارای خواص بازتابی وترایایی بوده ولی‌به جای خاصیت تقارنی‌دارای خـاصیت دیگری است . رابطهٔ « $\leqslant$ » در مجموعهٔ اعـداد حقیقی ورابطهٔ «$\subset$» در مجموعـه‌ها مثالهایی از رابطهٔ ترتیب می‌باشند .

تعریف ـ فرض‌کنیم رابطهٔ $\mathcal{R}$ در مجموعهٔ A تعریف شده باشد. $\mathcal{R}$ یك رابطهٔ ترتیب درA نامیده میشود هرگاه :

الف ـ $\mathcal{R}$ دارای خاصیت بازتابی باشد . یعنی

$$\forall a\in A \text{ ، } (a \text{ ، } a)\in\mathcal{R}$$

ب ـ داشته باشیم :

$$\forall a \text{ ، } b\in A(\ (a \text{ ، } b)\in\mathcal{R}\wedge(b \text{ ، } a)\in\mathcal{R})\Rightarrow(a=b)$$

ج ـ $\mathcal{R}$ دارای خاصیت ترایایی باشد:

$$\forall a \text{ ، } b \text{ ، } c\in A \text{ ، } (\ (a \text{ ، } b)\in\mathcal{R}\wedge(b \text{ ، } c)\in\mathcal{R})\Rightarrow(a \text{ ، } c)\in\mathcal{R}$$

خاصیت «ب» خاصیت پاد تقارنی رابطهٔ $\mathcal{R}$ در A نامیده می‌شود. پس :

رابطهٔ $\mathcal{R}$ درمجموعهٔ A دارای خاصیت پاد تقارنی است هرگاه :

$$\forall a \text{ ، } b\in A \text{ ، } (\ (a \text{ ، } b)\in\mathcal{R}\wedge(b \text{ ، } a)\in\mathcal{R})\Rightarrow(a=b)$$

بنابراین رابطهٔ $\mathcal{R}$ درمجموعهٔ A یك‌رابطهٔ ترتیب است هرگاه دارای سه خاصیت بازتابی، پاد تقارنی وترایایی باشد .

مثال ـ رابطهٔ $\mathcal{R}$ در مجموعهٔ $A=\{\text{۱،۲،۳}\}$ به صورت زیر تعریف شده است :

$$\mathcal{R}=\{(\text{۱،۲}) \text{ ، }(\text{۱،۱}) \text{ ، }(\text{۲،۲}) \text{ ، }(\text{۳،۳})\}$$

آیا $\mathcal{R}$ یك رابطهٔ ترتیب است ؟

حل: الف ـ هر عضو A با خودش بوسیله رابطهٔ $\mathcal{R}$ مربوط است پس $\mathcal{R}$ دارای خاصیت بازتابی است .

ب ـ $\mathcal{R}$ دارای خاصیت پاد تقارن است. زیرا، گزارهٔ شرطی زیر که مؤلفهٔ اول آن (سمت چپ آن) نادرست است ، درست می‌باشد :

$$(\ (\text{۱،۲})\ )\in\mathcal{R}\wedge\ (\text{۲،۱})\in\mathcal{R}\ )\ \Rightarrow \text{۱}=\text{۲}$$

ج ـ $\mathcal{R}$ دارای خاصیت ترایایی است. زیرا، گزارهٔ شرطی زیر که هر دومؤلفه‌اش درست است درست می‌باشد :

$$(\ (\text{۱،۲})\in\mathcal{R}\wedge\ (\text{۲،۲})\in\mathcal{R})\ \Rightarrow\ (\text{۱،۲})\in\mathcal{R}$$

رابطهٔ $\mathcal{R}$ دارای سه خاصیت بازتابی ، پاد تقارن و ترایایی بوده در نتیجه یك رابطه ترتیب است .

تمرین

۱ـ رابطهٔ : $\mathcal{R}=\{(\text{۱،۱}) \text{ ، } (\text{۱،۳}) \text{ ، } (\text{۲،۲}) \text{ ، } (\text{۳،۱}) \text{ ، } (\text{۴،۴})\}$ در مجموعهٔ

$A=\{۱،۲،۳،۴\}$ تعریف شده است. آیا $\mathcal{R}$ دارای خاصیت بازتابی است ؟

۲ـ هریك از رابطه‌های زیر در مجموعهٔ $E=\{۱،۲،۳\}$ تعریف شده است. تحقیق کنید کدام‌یك‌ازآنها دارای خاصیت بازتابی، تقارنی ویا ترایایی است .

$\mathcal{R}_1=\{(۱،۲)،(۳،۲)،(۲،۲)،(۲،۳)\}$ ؛ $\mathcal{R}_2=\{(۱،۲)،(۲،۳)،(۱،۳)\}$

$\mathcal{R}_3=\{(۱،۱)،(۲،۲)،(۲،۳)،(۳،۲)،(۳،۳)\}$ ؛ $\mathcal{R}_4=\{(۱،۲)\}$

$\mathcal{R}_5=\{(۱،۱)،(۲،۱)،(۲،۲)،(۳،۲)،(۲،۳)\}$ ؛ $\mathcal{R}_6=\{(۱،۱)،(۳،۲)،(۲،۳)\}$

۳ـ هریك از رابطه‌های‌زیر درمجموعهٔ اعداد طبیعی تعریف شده است. تحقیق کنید کدام‌از آنها خاصیت بازتابی یا تقارنی دارد .

« x کوچکتر یا مساوی y است » ؛ « x مقسوم‌علیه y است » ؛ « x و y نسبت به هم اولند ».

۴ـ رابطه‌ای مثل $\mathcal{R}$ در مجموعهٔ $E=\{۱،۲،۳\}$ بنویسید که نه خاصیت تقارنی و نه خاصیت بازتابی داشته باشد .

۵ـ رابطهٔ «عمود بودن» درمجموعهٔ خطوط صفحه دارای‌کدام‌یك از خواص بازتابی تقارنی یا ترایایی است .

۶ـ هرگاه رابطه‌های $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}'$ در یك مجموعه دارای خاصیت تقارنی باشند آیا $\mathcal{R}\cap\mathcal{R}'$ نیز در آن مجموعه دارای این خاصیت است ؟

۷ـ هرگاه رابطه‌های $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}'$ دریك مجموعه دارای‌خاصیت ترایایی باشند آیا $\mathcal{R}\cap\mathcal{R}'$ یا $\mathcal{R}\cup\mathcal{R}'$ نیزدرآن مجموعه دارای این خاصیت است.

۸ـ اگررابطه‌های $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}'$ دریك‌مجموعه دارای‌خاصیت بازتابی‌باشندآیا $\mathcal{R}\cup\mathcal{R}'$ یا $\mathcal{R}\cap\mathcal{R}'$ نیز درآن مجموعه دارای این خاصیت است ؟

۹ـ مجموعهٔ $A=\{a،b،c\}$ داده شده‌است رابطه‌ای درA بنویسید‌که : الف ـ خاصیت تقارنی داشته و خاصیت ترایایی نداشته باشد. ب ـ خاصیت ترایایی داشته و خاصیت‌تقارنی نداشته باشد . ج ـ فقط خاصیت بازتابی داشته باشد . د ـ خاصیت بازتابی و تقارنی داشته ولی خاصیت ترایایی نداشته باشد .

۱۰ـ رابطهٔ $a\mathcal{R}b$ در مجموعهٔ اعداد طبیعی به این معنی است که a و b دارای یك مقسوم علیه مشترك غیراز یك می‌باشند. آیا $\mathcal{R}$ یك رابطهٔ هم‌ارزی است ؟

۱۱ـ آیا رابطهٔ « هم‌مساحت بودن » درمجموعهٔ چند ضلعیهای داخل صفحه یك رابطهٔ هم‌ارزی است ؟

۱۲ـ هریك از روابط زیر در مجموعهٔ $A=\{۱،۲،۳\}$ تعریف شده است :

$\mathcal{R}_1=\{(۱،۱)\}$ ، $\mathcal{R}_2=\{(۱،۲)\}$ ، $\mathcal{R}_3=\{(۱،۱)،(۲،۳)،(۳،۲)\}$

تحقیق کنید کدام از آنها دارای خاصیت پاد تقارن می‌باشد .

۱۳- اگر $\mathcal{R}$ و $\mathcal{R}'$ تعریف شده در مجموعهٔ A دارای خاصیت پاد تقارن باشند، آیا $\mathcal{R}\cup\mathcal{R}'$ یا $\mathcal{R}\cap\mathcal{R}'$ در A نیز دارای این خاصیت می‌باشند ؟

۱۴- رابطهٔ « x بر y تقسیم پذیر است » در مجموعهٔ { ۱،۲،۳،۴،۵،۶ }=A تعریف شده است . آیا این رابطه یك رابطهٔ ترتیب است ؟

۱۵- رابطهٔ $\mathcal{R}$ در مجموعهٔ { ۰،۱،۲،۳ }=A به صورت زیر تعریف شده است :

$\mathcal{R}$={ (۰،۰) ، (۰،۱) ، (۱،۰) ، (۱،۲) ، (۲،۲) ، (۰،۲) ، (۲،۰) }

آیا $\mathcal{R}$ یك رابطهٔ ترتیب است ؟

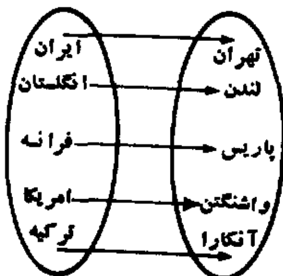
تابع

تابع ـ فرض کنید شما درجهٔ تب یك مریض را در بعضی ازساعات روز اول بهمن یك سال معین اندازه گرفته آن را دریك جدول به صورت زیر یادداشت کرده‌اید :

ساعات	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶
درجهٔ تب	۳۶/۵	۳۷/۲	۳۷/۵	۳۷/۶	۳۷/۸

$\mathcal{R}$={ (۸ ، ۳۶/۵) ،(۱۰ ، ۳۷/۲) ، (۱۲ ، ۳۷/۵) ، (۱۴ ، ۳۷/۶) ، (۱۶،۳۷/۸) }

روشن است که مریض دریك ساعت معین روز دارای دو درجهٔ تب متفاوت نیست به عبارت دیگر ، هیچ دو زوج مرتب متفاوتی از رابطهٔ $\mathcal{R}$ دارای مؤلفه های اول برابر نیستند .



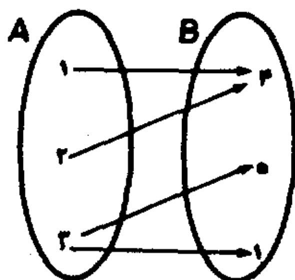
رابطهٔ $\mathcal{R}_1$ ازمجموعهٔ کشورهادرمجموعهٔ پایتختهای آنهابه صورت زیرتعریف شده‌است :
$\mathcal{R}_1$ نیز رابطه‌ای است که درآن هیچ دو زوج مرتب متفاوتی دارای مؤلفه‌های اول برابر نیستند . زیرا، هیچ کشوری در یك زمان معین دارای دوپایتخت نیست :

$\mathcal{R}_1$ = {(ایران ، تهران) ، (انگلستان ، لندن)،(فرانسه ،پاریس) ، (ترکیه ، آنکارا)}

در ریاضیات به‌طور فراوان باروابطی ازاین قبیل که درآنها هیچ دو زوج متفاوتی دارای

عضوهای اول برابر نیستند برمی‌خوریم. این نوع روابط درریاضیات وسایر علوم اهمیت‌خاص داشته به آنها تابع می‌گوییم .

یك رابطه که در آن هیچ دو زوج مرتب متفاوتی دارای مؤلفه‌های اول مساوی‌نباشند یك تابع نامیده می‌شود . به عبارت دیگر، یك رابطه‌که در آن به‌هرعضو دامنه ، عضو منحصر به‌فردی از برد نسبت داده می‌شود یك تابع است.



مثال ۱ ـ رابطهٔ $\mathcal{R}$ طبق نمودار روبه‌رو تعریف شده است آیا $\mathcal{R}$ یك تابع است ؟

حل : رابطهٔ فوق‌را به صورت‌زوجهای مرتب می‌نویسیم :

$$\mathcal{R}=\{(1،4)،(2،4)،(3،5)،(3،1)\}$$

در این رابطه چون دو زوج مرتب (۱ ، ۳) و (۵ ، ۳) دارای مـؤلفه‌های اول برابر می‌باشند (در نمودار از عضو ۳ دو پیکان خارج شده است.) لذا $\mathcal{R}$ یك‌تابع نیست .

مثال ۲ ـ رابطهٔ $\mathcal{G}$ طبق‌نمودار روبه‌رو تعریف شده است . آیا $\mathcal{G}$ یك تابع‌است ؟

حل ؛ رابطهٔ $\mathcal{G}$ را به صورت زوجهای مرتب می‌نویسیم .

$$\mathcal{G}=\{(a،1)،(b،1)،(c،2)،(d،2)،(e،3)\}$$

دراینجا هیچ دوزوج مرتبی‌دارای‌مؤلفه‌های اول‌مساوی نیستند . (درنموداراز هرعضو A فقط یك‌پیکان خارج شده است.) لذا $\mathcal{G}$ یك تابع است. در $\mathcal{G}$ زوجهای (a ، ۱)، (b ، ۱) دارای مؤلفه‌های دوم مساوی هستند با وجود این $\mathcal{G}$ یك تابع است. یعنی در یك تابع ممکن است زوجهای مرتبی وجود داشته باشندکه دارای مؤلفه‌های دوم مساوی باشند . از نظرنمودار پیکانی، تابع رابطه‌ای است‌که از هرعضو دامنهٔ آن یك و تنها یك پیکان خارج شده باشد .

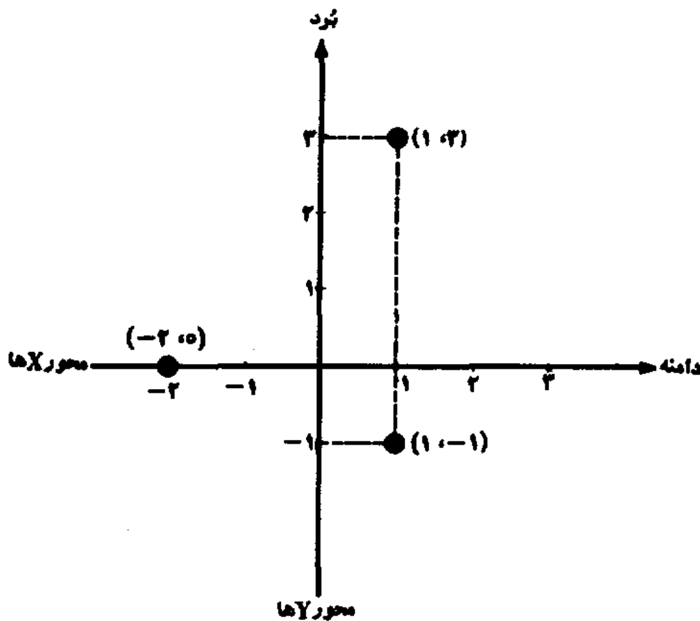
مثال ۳ ـ مطلوب است رسم نمودار مختصاتی رابطهٔ زیر وبیان‌آن‌که آیا این رابطه یك تابع است یانه ؟

$$\mathcal{R}=\{(-2،0)،(1،-1)،(1،3)\}$$

حل ؛ هرگاه نقاط نظیر زوجهای این رابطه را روی صفحهٔ مختصات تعیین‌کنیم، شکل زیر به دست می‌آید :

دراینجا زوجهای مرتب (۱ ـ ، ۱) و (۳ ، ۱) دارای مؤلفه‌های اول برابر هستند. لذا $\mathcal{R}$ یك تابع نیست . همچنین در شکل می‌بینید که نمودار این دو زوج مرتب روی خطی موازی

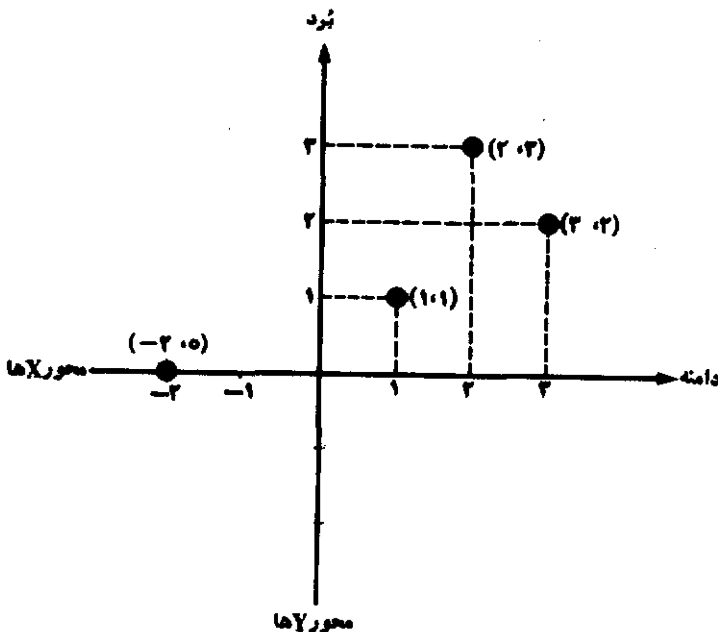
با محور yها قرار گرفته‌اند .



مثال ۴ ـ مطلوب است رسم نمودار مختصاتی رابطهٔ زیر وبیان‌آن‌که‌آیا این رابطه یك تابع است یانه ؟

$$\mathcal{G}=\{ (-۲،۰) ، (۱،۱) ، (۲،۳) ، (۳،۲) \}$$

حل: نمودار این رابطه در زیر رسم شده است. در این رابطه‌هیچ دوزوج مرتبی‌دارای



عضوهای اول‌برابر نیستند. به عبارت دیگر، هیچ دونقطه‌از نمودار این رابطه روی یك خط موازی بامحور yها قرار نگرفته است . لذا $\mathcal{G}$ یك تابع می‌باشد .

از نظر نمودار مختصاتی ، تابع رابطه‌ای است‌که هیچ دونقطه‌ای از نمودار آن روی یك خط موازی محور yها قرار نگرفته باشد .

دامنه و برد یك تابع

تعریف ـ فرض‌کنیم f تابعی از A در B باشد . مجموعه

$\{x \in A \mid (x,y) \in f\}$

« دامنه» تابع f نامیده شده و با D_f نشان داده میشود. همچنین مجموعه

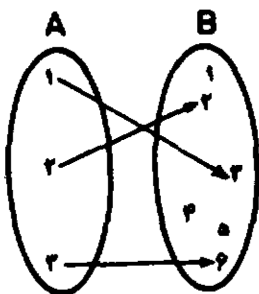
$\{ y \in B \mid (x,y) \in f \}$

«برد» تابع f نامیده شده و با R_f نشان داده میشود .

بالاخره مجموعه B ، « هم دامنه» (ویاحوزه) تابع f نامیده میشود .

اگر f تابعی از A در B بوده و $D_f = A$ ، گوئیم f تابعی روی A در B است .

هرگاه دامنه و هم دامنه تابع $\mathcal{G}$ مجموعه A باشد، در اینصورت گفته میشود که تابع $\mathcal{G}$ در A تعریف شده است .

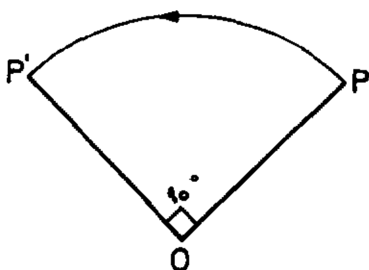


مثال ۱ـ تابع $\mathcal{G}$ ازمجموعهٔ $A=\{۱،۲،۳\}$ درمجموعهٔ $B=\{۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$ بانمودار رو به رو تعریف شده است :

در اینجا A و B به ترتیب دامنه و حوزهٔ $\mathcal{G}$ بوده همان‌طورکه‌درنمودارآن‌می‌بینید ازهرعضو A یك پیکان خارج شده است در صورتی‌که به هرعضو B پیکان منتهی نشده است. همچنین برد f مجموعه {۶و۳و۲} میباشد.

مثال ۲ ـ نقطهٔ ثابت O را در صفحه درنظرگرفته به هرنقطهٔ P از این صفحه نقطهٔ P' را به صورت زیر نسبت می‌دهیم :

نقطهٔ P' ازدوران P حول نقطهٔ O در خلاف جهت حرکت عقربهٔ ساعت و به اندازهٔ °۹۰ به دست می‌آید :

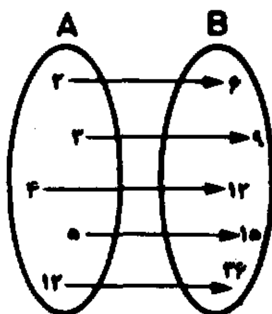


بدین‌ترتیب‌یك‌تابع‌به‌دست می‌آید که دامنه وحوزهٔ آن مجموعهٔ همهٔ نقاط صفحه است .

یادآوری ـ از این پس برای نامگذاری تابع از حرفهای f ، g ، h ، . . . استفاده می‌کنیم .

قانون و نمایش تابع

تابع f از مجموعهٔ A در مجموعهٔ B طبق نمودار زیر تعریف شده است :



در این نمودار عضو ۲ از دامنه بایك پیکان به عضو۶ ازحوزه مربوط شده‌است . در اینجا گفته می‌شود تابع f عضو۲ را روی ۶ تصویرکرده است . این مطلب‌را به یکی‌از دو صورت زیر نمایش می‌دهند :

$$2 \overset{f}{\longmapsto} 6$$

$$f : 2 \longmapsto 6$$

به عدد ۶ مقدار تابع به‌ازای ۲ نیز می‌گویند . درزیر تصاویر سایر عضوهای A نوشته شده است .

$$3 \overset{f}{\longmapsto} 9$$

$$4 \longmapsto 12$$

$$5 \longmapsto 15$$

$$12 \longmapsto 36$$

هرگاه x عضو دلخواهی ازدامنه باشد به‌جای نوشتن همهٔ تصاویر فوق می‌توان‌نوشت:

$$x \overset{f}{\longmapsto} 3x \qquad (1)$$

در اینجا (۱) را قانون تابع خوانده آن را به صورتهای زیر نیز نمایش می‌دهند :

$$f(x) = 3x$$

$$y = 3x$$

$$y = f(x) = 3x$$

از آنچه‌گفته شد نتیجه می‌شود که هرتابع روی A در B از سه قسمت زیر تشکیل شده است :

الف ـ مجموعه‌ای A که به‌نام دامنهٔ تابع خوانده می‌شود .

ب ـ مجموعه‌ای B که به‌نام حوزهٔ تابع خوانده می‌شود .

ج ـ قانونی که به هرعضو A یك و تنها یك عضو از B را نسبت می‌دهد . این قانون معمولا به صورت یك یاچند معادله (گزاره نما) بیان می‌شود .

تابع f را که بدین ترتیب بیان شده است به شکل زیر نمایش می‌دهند :

$$A \xrightarrow{f} B \quad \text{و} \quad f : A \to B$$
$$y = f(x) \qquad y = f(X)$$

ومی‌خوانند «تابع f روی مجموعهٔ A در B به‌صورت $y = f(x)$ تعریف شده‌است.» درحالت $A = B$. می‌نویسیم :

$$A \xrightarrow{f} A \quad \text{و یا} \quad F : A \to B$$
$$y = f(x) \qquad y = F(X)$$

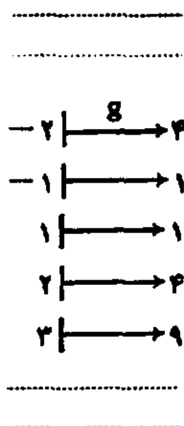
که خوانده می‌شود « تابع f در مجموعهٔ A به صورت $y = f(x)$ تعریف شده است » .

مثال ـ تابع g روی مجموعهٔ اعداد درست‌غیراز صفر در مجموعهٔ اعداد طبیعی به صورت زیر تعریف شده است :

« به هرعضو دامنه مربع‌آن نسبت داده می‌شود » .

این تابع را به صورتی‌که دربالا گفته شد نمایش دهید.

حل : طبق تعریف داده شده تصاویر عضوها در این تابع به صورت زیر است :



$$t \overset{g}{\longmapsto} t^{2}$$

پس نمایش این تابع طبق‌آنچه گفته شد به صورت زیرخواهد بود .

$$Z \xrightarrow{g} N \quad \text{و یا} \quad g : Z \to N$$
$$g(t) = t^{2} \qquad g(t) = t^{2}$$

باید توجه داشت‌که حرف t یا x نقشی درنمایش قانون یك تابع ندارد وقانون تابع‌مثال قبل‌را به صورتهای زیرنیزمی‌توان نمایش داد :

مربع آن‌عدد = (هرعدد) g ، $g(z)=z^{۲}$ ، $g(x)=x^{۲}$ ، $g(y)=y^{۲}$

تذکر ـ گاهی اوقات تابع در دامنهٔ داده شده با چند قانون بیان می‌شود . مثلاً تابع s درمجموعهٔ اعداد حقیقی‌که به‌نام تابع نماد معروف است به صورت زیر تعریف‌می‌شود .

$$s(x)=\begin{cases} ۱ & : \quad x>۰ \quad \text{وقتی} \\ ۰ & : \quad x=۰ \\ -۱ & : \quad x<۰ \end{cases}$$

ویا تابع $|x|$ درمجموعهٔ اعداد حقیقی‌که به‌نام تابع قدر مطلق خوانده می‌شود به صورت‌زیر تعریف شده است :

$$|x|=\begin{cases} x & : \quad x>۰ \\ ۰ & : \quad x=۰ \\ -x & : \quad x<۰ \end{cases}$$

تمرین

۱ـ تعیین‌کنیدکه از روابط زیر کدامها تابع هستند . دامنه و برد هرکدام را که تابع است بنویسید.

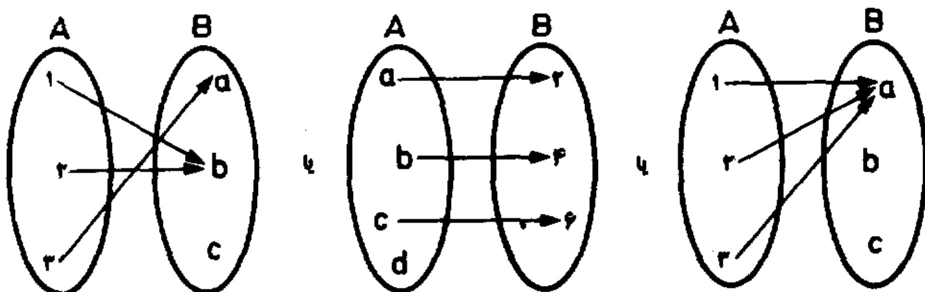
$$\{(۳،-۴)،(۳،۲)،(۰،۰)\} ؛ \{(۵،۶)،(۷،۳)،(۰،۰)،(۲،۴)\}$$
$$\{(۲،۶)،(۴،۶)،(۶،۶)\} ؛ \{(a،x)،(a،y)،(a،z)\}$$

۲ـ تعیین‌کنید که از روابط زیر کدامها تابع هستند .

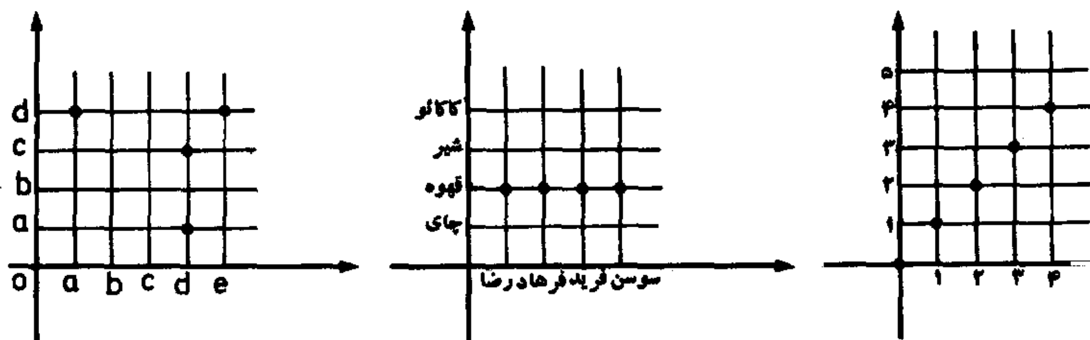
$$\{(x،y) \mid x\in Z ، y\in Z \text{ و } y^{۲}=۴x\} ؛ \{(x،y) \mid x\in Z ، y\in Z \text{ و } x+y=۵\}$$
$$\{(x،y) \mid x\in Z ، y\in Z \text{ و } y=\sqrt{x}\} ؛ \{(x،y) \mid x\in Z ، y\in Z \text{ و } x<y\}$$

(Z دامنهٔ هریك ازتوابع است).

۳ـ از نمودارهای زیر کدام یك تابع را مشخص می‌سازد :



۴ـ ازنمودارهای زیرکدام یك تابع است :



۵ـ ازجدولهای زیرکدام یك تابع را مشخص می‌سازد :

x	−۴	−۳	−۱
y	۶	۰	۰

؛

x	−۲	۰	−۲
y	−۸	−۲	۴

؛

x	−۲	۰	۲	−۵
y	−۵	−۱	۳	۲

۶ـ تابعی به صورت زیر تعریف شده است :

$$\left\{ (x ، y) \;\middle|\; x \in \{ ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ \} \text{ و } y = \frac{x}{۲} - ۵ \right\}$$

این تابع را به صورت زوجهای مرتب نشان دهید .

۷ـ دو تابع f و g به صورتهای زیر تعریف شده‌اند :

$$f = \{ (۱ ، ۱) ، (۲ ، ۲) \} \quad ؛ \quad g = \{ (۱ ، ۲) ، (۳ ، ۴) \}$$

آیا $f \cup g$ یا $f \cap g$ نیز تابع هستند ؟ آیا این مطلب درحالت‌کلی نیز درست است ؟

۸ـ تابع f درمجموعهٔ $Z_۰ = \{ ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، . . . \}$ به‌صورت زیرتعریف شده‌است:

$$\{ (۰،۰) ، (۱،۳) ، (۲،۶) ، (۳،۹) ، (۴،۱۲) ، (۵،۱۵) ، . . . \}$$

قانون تابع را بنویسید .

۹- نمودار مختصاتی تابع زیررا رسم کنید :

$$g=\{(x،y) \quad x\in\{-۲، -۱، ۰، ۱، ۲\} \text{ و } y=x^{۲}\}$$

۱۰- مطلوب است نمایش هریك از توابع زیر :

الف - تابع f به هرعدد حقیقی ، مکعب آن عدد را نسبت می‌دهد .

ب - تابع g به هرعدد حقیقی ، عدد ثابت ۵ را نسبت می‌دهد .

ج - تابع h به هرعدد حقیقی مثبت ، مربع آن وبه هرعدد حقیقی منفی ، عدد ثابت ۴ و به صفر ، عدد صفر را نسبت می‌دهد .

۱۱- تابع f در مجموعهٔ اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده‌است :

$$f(x)=\begin{cases} ۳x-۱ & :x>۳ \text{ اگر} \\ x^{۲}-۳ & :x=۳ \text{ اگر} \\ ۲x+۳ & :x<۳ \text{ اگر} \end{cases}$$

مطلوب است محاسبهٔ $f(۰)$ ، $f(۱)$ ، $f(۲)$ ، $f(+۳)$ ، $f(۵)$.

تعریف - تابع $f: A\to B$ پوششی نامیده می‌شود[1] . هرگاه داشته باشیم ، $R_f=B$.
به عبارت دیگر ، تابع f پوششی است هرگاه برای هر y متعلق به B عضوی مانند x متعلق به A وجود داشته باشد به قسمی‌که $f(x)=y$.

$$\forall y\in B ، (\exists x\in A , f(x)=y)$$

مثال - تابع g در مجموعهٔ اعداد درست باقانون زیر تعریف شده است :

$$g(x)=x^{۲}$$

آیا g یك تابع پوششی است ؟

حل - در این تابع، به هر عدد درست مربع آن نسبت داده می‌شود . بنابراین اگر y یك عدد درست نامنفی باشد (مانند۲ −) ، هیچ عدد درستی مانند x وجود ندارد به‌طوری‌که $y=x^{۲}$. بنابراین g یك تابع پوششی نیست .

تعریف - تابع $g: A\to B$ را یك به یك خوانند هرگاه اگر x و x′ دوعضو متمایز از A باشند ، آن‌گاه $g(x)$ و $g(x')$ نیز دو عضو متمایز در B باشند. به عبارت دیگر، g یك تابع یك به یك است هرگاه برای هر x و x′ متعلق به A داشته باشیم :

---

۱ - تابع پوششی را « تابع برروی » نیز گفته‌اند .

$$(x \neq x') \Rightarrow g(x) \neq g(x')$$

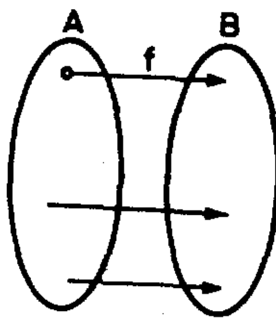
به عنوان یک‌تمرین نشان دهیدکه تابع $g : A \rightarrow B$ یک ـ به ـ یک است اگر و تنها اگر برای هر x' و x متعلق به A داشته باشیم :

$$g(x) = g(x') \Rightarrow x = x'$$

مثال ـ تابع g از مجموعهٔ $A = \{ ۱ ، ۲ ، ۳ \}$ در مجموعهٔ $B = \{ a ، b ، c ، d \}$ به صورت زیر تعریف شده است :

$$g(۱) = a ، g(۲) = b ، g(۳) = c$$

آیا g یک تابع یک به یک‌است ؟



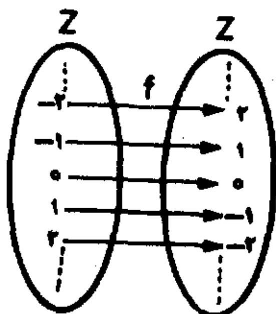
تعریف ـ تابع $h : A \rightarrow B$ را یک به یک و پوششی گویند هرگاه h هم یک به یک و هم پوششی باشد .

تابع یک‌به یک وپوششی را یک‌گسترش دوسویی ویا یک تناظر یک به یک نیز می‌نامند .

مثال ۱ـ تابع h درمجموعهٔ عددهای درست به‌صورت زیرتعریف شده است :

$$h = Z \longrightarrow Z$$

$$h(x) = -x$$



آیا h یک تابع یک به یک و پوششی است ؟

حل: الف ـ h تابعی است یک ـ به ـ یک زیرا برای هر x و x' متعلق به z داریم :

$$x \neq x' \Longrightarrow -x \neq -x' \Longrightarrow g(x) \neq g(x')$$

ب ـ h تابعی است پوششی زیرا اگر x یک‌عدد درست باشد، پس $h(-x) = x$ که درآن $-x$ نیز یک عدد درست است .

مثال ۲ ـ تابع $f : R \longrightarrow R$ را به صورت زیرتعریف می‌کنیم :

$$f(x) = ۲x + ۱$$

نشان دهید که f یک تابع یک به یک و پوششی است .

حل : باید نشان دهیم که تابع f هم یک به یک و هم پوششی می‌باشد .

الف ـ f تابعی یک به یک است هرگاه برای هر x' و x متعلق به R داشته باشیم :

$$f(x)=f(x') \Rightarrow (x=x') \qquad (۱)$$

اما اگر $f(x)=f(x')$ ، داریم :

$$۲x+۱=۲x'+۱$$

قانون حذف :
$$\therefore \quad ۲x=۲x'$$

قانون حذف :
$$\therefore \quad x=x'$$

یعنی مقدم و تالی گزارهٔ شرطی (۱) درست بوده در نتیجه گزاره درست است و تابع یک به یک می‌باشد .

ب ـ f تابعی پوششی است هرگاه برای هرعدد حقیقی y ، یک عدد حقیقی x وجود داشته باشد به قسمی که :

$$f(x)=y$$

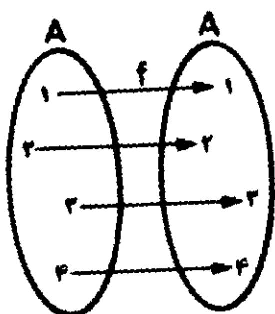
$$\therefore ۲x+۱=y$$

$$\therefore \quad x=\frac{y-۱}{۲}$$

وچون x همیشه دارای جواب است پس f پوششی است .

تابع یکسان

تابع f در مجموعهٔ $A=\{۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴\}$ به صورت زیر تعریف شده است :

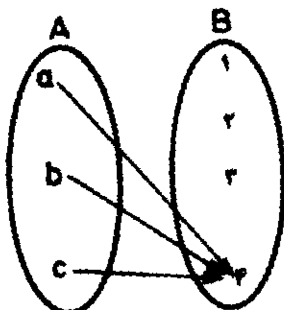


در این تابع به هرعضو مجموعهٔ A خود آن عضو نسبت داده شده است . تابع f مثالی از یک تابع یکسان است .

تعریف ـ تابع $f: A \rightarrow A$ یکسان نامیده می‌شود، هرگاه قانون تابع به‌صورت زیربیان شده‌باشد:

$$f(x)=x$$

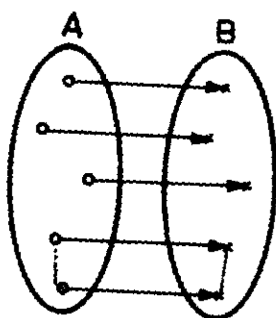
واضح‌است‌که تابع یکسان یک‌به یک‌وپوششی‌می‌باشد .



تابع ثابت

تابع g طبق نمودار رو به رو تعریف شده است :

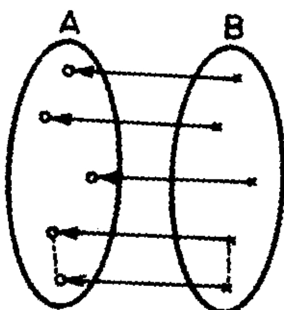
ملاحظه میکنیم که برد این تابع فقط شامل عضو ۴



می‌باشد. g مثالی از یک تابع ثابت است .

تعریف ـ تابع $g : A \to B$ ثابت نامیده‌می‌شود هرگاه برد g تنها شامل یک عنصرباشد .

تابع وارون (معکوس)



تابع f که با نمودار روبه رو تعریف شده است یک به یک و پوششی می‌باشد .

از تغییر جهت پیکانهادراین نمودار تابع‌دیگری مثل gبه‌دست می‌آیدکه به نام تابع وارون f نامیده می‌شود. همچنین توابع g و f وارون یکدیگر نامیده می‌شوند .

اگر تابع f یک به یک وپوششی نباشد در این صورت وارون نخواهد داشت .

تعریف ـ اگر تابع $f : A \to B$ یک به یک‌وپوششی باشد. از تغییر جهت پیکانها درنمودار پیکانی آن تابعی مثل g به صورت زیربه‌دست می‌آید :

$$g : B \longrightarrow A$$

که تابع وارون f نامیده می‌شود. بنابراین f و g وارون یکدیگر می‌باشند هرگاه :

$$\forall a \in A \text{ و } \forall b \in B \text{ ، } (f(a) = b \Longleftrightarrow g(b) = a)$$

مثال ـ دو تابع f و g به صورتهای زیر داده شده‌اند :

$$f : R \longrightarrow R \quad \text{،} \quad g : R \longrightarrow R$$

$$f(x) = ۲x - \frac{۵}{۲} \quad (۱) \qquad g(x) = \frac{۱}{۲}x + \frac{۵}{۴} \quad (۲)$$

آیا f و g وارون یکدیگرند ؟

حل : طبق تعریف باید نشان دهیم‌که :

$$\forall a \text{ و } b \in R \text{ ، } (f(a) = b \Longleftrightarrow g(b) = a)$$

اینجا یک‌گزارهٔ دوشرطی داریم . بنا براین اثبات شامل دو قسمت خواهد بود :

الف ـ فرض‌کنید $f(a) = b$. طبق (۱) داریم :

$$f(a) = b = ۲a - \frac{۵}{۲} \qquad (۳)$$

نشان دهید که f یك تابع یك به یك و پوششی است .

حل : باید نشان دهیم که تابع f هم یك به یك و هم پوششی می‌باشد .

الف ـ f تابعی یك به یك است هرگاه برای هر x' و x متعلق به R داشته باشیم :

$$f(x)=f(x') \Rightarrow (x=x') \qquad (۱)$$

اما اگر $f(x)=f(x')$ ، داریم :

$$۳x+۱=۳x'+۱$$

قانون حذف : $\therefore\ ۳x=۳x'$

قانون حذف : $\therefore\ x=x'$

یعنی مقدم و تالی گزارهٔ شرطی (۱) درست بوده در نتیجه گزاره درست است و تابع یك به یك می‌باشد .

ب ـ f تابعی پوششی است هرگاه برای هرعدد حقیقی y ، یك عدد حقیقی x وجود داشته باشد به قسمی که :

$$f(x)=y$$

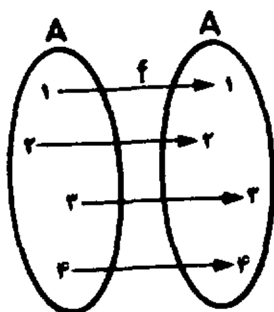
$$\therefore\ ۳x+۱=y$$

$$\therefore\ x=\frac{y-۱}{۳}$$

وچون x همیشه دارای جواب است پس f پوششی است .

تابع یکسان

تابع f در مجموعهٔ $A=\{۱،۲،۳،۴\}$ به صورت زیر تعریف شده است :

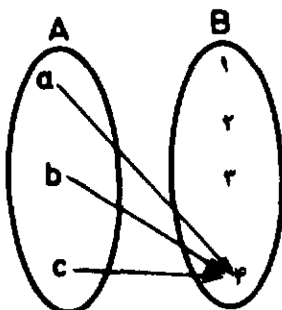


در این تابع به هرعضو مجموعهٔ A خود آن عضو نسبت داده شده است . تابع f مثالی از یك تابع یکسان است .

تعریف ـ تابع $f:A\rightarrow A$ یکسان نامیده می‌شود، هرگاه قانون تابع به‌صورت زیربیان شده‌باشد:

$$f(x)=x$$

واضح‌است‌که تابع یکسان یك‌به یك‌وپوششی‌می‌باشد .

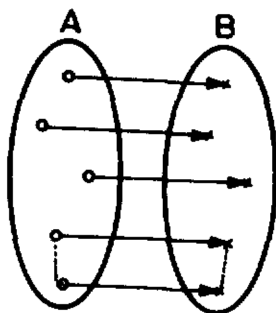


تابع ثابت

تابع g طبق نمودار رو به رو تعریف شده است :

ملاحظه میکنیم که برد این تابع فقط شامل عضو ۴

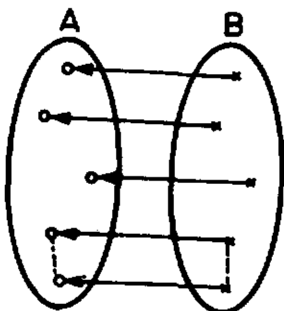
می‌باشد. g مثالی از یک تابع ثابت است .



تعریف ـ تابع $g: A \to B$ ثابت نامیده‌می‌شود هرگاه برد g تنها شامل یک عنصرباشد .

تابع وارون (معکوس)

تابع f که با نمودار روبه رو تعریف شده است یک به یک و پوششی می‌باشد .



از تغییر جهت پیکانهادراین نمودار تابع‌دیگری مثل gبه‌دست می‌آیدکه به نام تابع وارون f نامیده می‌شود. همچنین توابع g و f وارون یکدیگر نامیده می‌شوند .

اگر تابع f یک به یک وپوششی نباشد در این صورت وارون نخواهد داشت .

تعریف ـ اگر تابع $f: A \to B$ یک به یک‌وپوششی باشد. از تغییر جهت پیکانها درنمودار پیکانی آن تابعی مثل g به صورت زیربه‌دست می‌آید :

$$g: B \longrightarrow A$$

که تابع وارون f نامیده می‌شود. بنابراین f و g وارون یکدیگر می‌باشند هرگاه :

$$\forall a \in A \text{ و } \forall b \in B \text{ ، } (f(a)=b \Longleftrightarrow g(b)=a)$$

مثال ـ دو تابع f و g به صورتهای زیر داده شده‌اند :

$$f: R \longrightarrow R \quad , \quad g: R \longrightarrow R$$

$$f(x)=۲x-\frac{۵}{۲} \quad (۱) \qquad g(x)=\frac{۱}{۲}x+\frac{۵}{۴} \quad (۲)$$

آیا f و g وارون یکدیگرند ؟

حل : طبق تعریف باید نشان دهیم‌که :

$$\forall a \text{ و } b \in R \text{ ، } (f(a)=b \Longleftrightarrow g(b)=a)$$

اینجا یک‌گزارهٔ دوشرطی داریم . بنا براین اثبات شامل دو قسمت خواهد بود :

الف ـ فرض‌کنید $f(a)=b$. طبق (۱) داریم :

$$f(a)=b=۲a-\frac{۵}{۲} \qquad (۳)$$

ولی طبق (۲) مقدار $g(b)$ برابر است با :

$$g(b)=\frac{۱}{۲}b+\frac{۵}{۴}$$

هرگاه در این تساوی به جای b مقدارش را از (۳) قرار دهیم خواهیم داشت :

$$g(b)=\frac{۱}{۲}(۲a-\frac{۵}{۲})+\frac{۵}{۴}$$
$$=a$$

یعنی :

$$f(a)=b\Rightarrow g(b)=a$$

ب ـ فرض‌کنیم $g(b)=a$ ، طبق (۲) داریم :

$$g(b)=a=\frac{۱}{۲}b+\frac{۵}{۴}$$

و یا :

$$b=۲a-\frac{۵}{۲}$$

از طرفی طبق (۱) داریم :

$$f(a)=۲a-\frac{۵}{۲}$$
$$=b$$

یعنی :

$$g(b)=a\Rightarrow f(a)=b$$

یعنی گزارهٔ دوشرطی درست بوده و f و g وارون یکدیگرند .

تمرین

۱ـ سه مجموعهٔ

$$A=\{x \mid x\in R،-۱<x<۱\}$$
$$B=\{x \mid x\in R ، ۱<x<۳\}$$
$$C=\{x \mid x\in R،-۴<x<-۱\}$$

داده شده و R مجموعهٔ اعداد حقیقی است . توابع f ، g و h دراین مجموعه‌ها به صورتهای

زیر تعریف شده‌اند :

$$f : A \longrightarrow R \;;\; g : B \longrightarrow R \;;\; h : C \longrightarrow R$$
$$f(x) = x^2 \;;\; g(x) = x^2 \;;\; h(x) = x^2$$

تعیین کنید کدام یک از این تابعها یک‌به‌یک یا پوششی است.

۲- هر یک از تابعهای زیر از مجموعهٔ $A=\{a،b،c،d،e\}$ در مجموعهٔ $B=\{x \mid$ x یکی از حروف الفبای لاتین است $\}$ تعریف شده است . تعیین کنید کدام یک از این تابعها یک به یک است .

الف- $f(a)=r \;;\; f(b)=a \;;\; f(c)=s \;;\; f(d)=r \;;\; f(e)=e$

ب- $g(a)=a \;;\; g(b)=b \;;\; g(c)=e \;;\; g(d)=r \;;\; g(e)=s$

ج- $h(a)=z \;;\; h(b)=y \;;\; h(c)=x \;;\; h(d)=y \;;\; h(e)=z$

۴- آیا تابعهای زیر پوششی می‌باشند .

$$f : N \longrightarrow N \;;\; g : N \longrightarrow N$$
$$f(x)=x+۳ \;;\; g(x)=۳x-۲$$

(N مجموعهٔ اعداد طبیعی است)

۵- تعیین کنید کدام یک از تابعهای زیر یک به‌یک است:

$$f : R \longrightarrow R \;;\; g : R \longrightarrow R \;;\; h : R \longrightarrow R$$
$$f(x)=۳x+۲ \;;\; g(x) = x^2 \;;\; h(x)=\sqrt[3]{x}$$

(R مجموعهٔ اعداد حقیقی است)

۶- تابع h به صورت زیر تعریف شده است :

$$h : R \longrightarrow R$$
$$h(x)=|x|$$

(R مجموعهٔ اعداد حقیقی است)

عضوهای دوم زوجهای زیررا بنویسید :

$$(۰،h(۰)) ; (۲،h(۲)) ; (-۳،h(-۳)) ; (-۱،h(-۱)) ; \left(-\frac{۱}{۳}،h(-\frac{۱}{۳})\right)$$

۷- تعیین کنید کدام یک از تابعهای زیر یک به‌یک و پوششی است .

(R مجموعهٔ اعداد حقیقی است)

$$f : R \longrightarrow R \;;\; g : R \longrightarrow R$$
$$f(x)=x^3+۳ \;;\; g(x)=|x|-۲$$

۸- تابعهای f و g به صورتهای زیر تعریف شده‌اند :

$$f : R \longrightarrow R \quad , \quad g : R \longrightarrow R$$

$$f(x) = ۲x - ۳ \quad , \quad g(x) = \frac{x}{۲} + \frac{۳}{۲}$$

آیا f و g معکوس یکدیگرند ؟

۹- تابعهای h و t به صورتهای زیر تعریف شده‌اند :

$$h : R \longrightarrow R \quad , \quad t : R^{+} \longrightarrow R^{+}$$

$$h(x) = x^{۲} \quad , \quad t(x) = \sqrt{x}$$

آیا h و t معکوس یکدیگرند ؟

فصل ۲

ماتریس

در زندگی روزمره بعضی از ابزارها به حدی موجب آسانی کارها می‌شوند که حتی شاید تصورش نیز برای شما مشکل باشد. اختراع چرخ را درنظربگیرید ببینید تاچه حد به کار- بردن چرخ نیروی لازم برای کشیدن گاری ، درشکه ، دوچرخه ، . . . و ماشین را تقلیل داده است .

در ریاضیات نیز گاهی اوقات نمادها وقراردادهایی به‌کاربرده می‌شودکه شبیه چرخ بوده کارها را ساده می‌کند ؛ مثلا در صفحهٔ مختصات به جای این‌که توضیح داده شود نقطهٔ معین A دارای طول (خُفت) a و عرض (رُست) b است به طور ساده می‌نویسند (A (a ، b . با این قراردادکه a طول (خفت) و b عرض (رست) نقطهٔ A است . اکنون هرشخص آشنا به ریاضیات بایك نگاه می‌تواند طول (خفت) وعرض (رست) نقطهٔ A یا هرنقطه‌ای راکه به صورت فوق نوشته شده است بیان کند .

همچنین استفاده از جدول ضرب کار محاسبه و یادگیری ضرب اعداد یک رقمی را ساده کرده است .

×	۱	۲	۳ . . . ۹
۱	۱	۲	۳ . . . ۹
۲	۲	۴	۶ . . . ۱۸
۳	۳	۶	۹ . . . ۲۷
⋮	....	....	....
⋮	....	....	....
۹	۹	۱۸	۲۷ . . . ۸۱

این نوع قراردادها وجدولها را بعدها به طور فراوان در ریاضیات خواهید دید. دراینجا ما می‌خواهیم یک نوع از این جدولها راکه کار بعضی از محاسبات را بسیار ساده‌کرده است به شما معرفی کنیم . به مثالهای زیر توجه‌کنید :

مثال ۱ ـ انبارهای یك شرکت‌گاز در محلهای A ، B و C قرارگرفته است. فاصله‌های

سه خانهٔ K_1 ، K_2 و K_3 از این انبارها به قرار زیر می‌باشد :

فاصلهٔ A تا خانهٔ K_1 : ۵۰ کیلومتر

فاصلهٔ A تا خانهٔ K_2 : ۳۰ »

فاصلهٔ A تا خانهٔ K_3 : ۲۰ »

فاصلهٔ B تا خانهٔ K_1 : ۷۰ »

فاصلهٔ B تا خانهٔ K_2 : ۵۰ »

فاصلهٔ B تا خانهٔ K_3 : ۴۰ »

فاصلهٔ C تا خانهٔ K_1 : ۶۰ »

فاصلهٔ C تا خانهٔ K_2 : ۲۵ »

فاصلهٔ C تا خانهٔ K_3 : ۴۵ »

این اطلاعات را بااستفاده از یك جدول مستطیل شکل‌که به وسیلهٔ‌کروشه یا پرانتزبسته شده است به صورت زیرنشان می‌دهیم :

	K_1	K_2	K_3
A	۵۰	۳۰	۲۰
B	۷۰	۵۰	۴۰
C	۶۰	۲۵	۴۵

اکنون باکمك این جدول مستطیل شکل به‌آسانی فاصلهٔ انبارگاز تاهرخانه معین می‌شود، مثلا فاصلهٔ انبار B از خانهٔ K_2 در محل تلاقی خطوط افقی و قائمی که به ترتیب از B و K_2 رسم می‌شوند قرارگرفته است .

معمولاً از نوشتن حروف نیـز خودداری نموده اطلاعات فوق را به صورت زیر نشان می دهیم :

۵۰	۳۰	۲۰
۷۰	۵۰	۴۰
۶۰	۲۵	۴۵

این جدول مستطیل شکل از اعداد مثالی از یك ماتریس است .

مثال ۲ ـ نتیجهٔ مسابقات چهار تیم فوتبال باشگاههای مختلف تهران دربازیهای فصلی به صورت زیرگزارش شده است :

	مساوی	برد	باخت
تیم A :	۱	۲	۶
تیم B :	۱	۴	۴

تیم C : ۰ ۲ ۷

تیم D : ۱ ۵ ۳

اطلاعات فوق با استفاده ازجدول مستطیل شکل به‌صورت روبه‌رو نشان داده می‌شود :

$$\begin{bmatrix} ۶ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۴ & ۱ \\ ۷ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۵ & ۱ \end{bmatrix}$$

این جدول نیزمثالی ازیك ماتریس است. درزیرچند ماتریس دیگر نوشته شده‌که هرکدام ممکن است برای نمایش یك دسته اطلاعات معین به‌کار برده شوند:

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & -۱ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

به‌طورکلی هرجدول مستطیل شکل ازاعداد یك ماتریس نامیده می‌شود .

سطر و ستون یك ماتریس ـ ماتریس زیر را درنظر بگیرید :

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

هرکدام از اعداد داخل کروشه‌یك‌عضوماتریس‌خوانده‌می‌شود. عضوهایی که‌در امتداد یك خط افقی‌قرارگرفته‌اندیك‌سطرماتریس و عضوهایی که در امتدادیك‌خط قائم واقع شده‌اند یك ستون ماتریس نامیده می‌شوند .

ستون

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

سطر

ماتریس فوق دارای ۳ سطر و ۳ ستون‌است. بالاترین سطر ماتریس را سطراول وسطرهای زیرآن به ترتیب سطر دوم ، سطر سوم ، . . . خوانده می‌شوند . همچنین اولین ستون سمت چپ را ستون اول و بقیه ازچپ به راست به ترتیب ستون دوم، ستون سوم ، . . . می‌باشند.

هـرماتریس‌که دارای m سطر و n ستون باشد، یك ماتریس m در n و یا $m \times n$ نامیده میشود. برای مثال‌ماتریس زیریك ماتریس ۳ × ۲ است .

ستون‌سوم ستون دوم ستون اول

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{سطر اول} \\ \text{سطر دوم} \end{matrix}$$

ماتریس رو به روکه دارای سه سطر ودوستون است یك ماتریس ۲ × ۳ است .

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

درزیر چند ماتریس دیگر نوشته شده است .

$$\begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس ۴ × ۳ ، ماتریس ۱ × ۳ ماتریس ۳ × ۱ ماتریس ۲ × ۲

توجه‌کنید که در یك ماتریس $m \times n$ عـدد دست m نمایش تعداد سطرها و عـدد دست n نمایش تعداد ستونها است .

یك ماتریس $m \times n$ بصورت زیرمیباشد .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

ماتریس (۱) بصورت $[a_{ij}]_{m \times n}$ نیز نشان داده میشود .

ماتریسهای خاص

۱ـ اگر دریك ماتریس $m \times n$ داشته باشیم $m = n$، آن‌گاه یك‌ماتریس $n \times n$ خواهیم داشت، چنین ماتریسی‌که تعدادسطرها وستونهای‌آن‌مساوی هستندیك‌ماتریس‌مربع نامیده می‌شود

در زیر چند ماتریس مربع نوشته شده است :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\ ۹ & ۱۰ & ۱۱ & ۱۲ \\ ۱۳ & ۱۴ & ۱۵ & ۱۶ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

ماتریس مربع ۴×۴   ماتریس مربع ۳×۳   ماتریس مربع ۲×۲

۲ـ اگر دریك ماتریس $m \times n$ داشته باشیم $m = ۱$، آن‌گاه یك ماتریس $۱ \times n$ خواهیم داشت ؛ چنین ماتریسی‌که دارای یك سطر و n ستون است یك ماتریس سطری نامیده می‌شود .

درزیرچند ماتریس سطری نوشته شده است :

$$[\,۱ \;\; ۲ \;\; ۳ \; \cdots \; n\,] ، [\,۵ \;\; ۷ \;\; ۸ \;\; ۱۱\,] ، [\,۲ \;\; ۵ \;\; ۶\,] ، [\,۳ \;\; ۴\,]$$

ماتریس سطری $۱ \times n$ ماتریس‌سطری۴×۱   ماتریس‌سطری۳×۱   ماتریس‌سطری۲×۱

در ماتریس سطری $[\,۵ \;\; ۷ \;\; ۸ \;\; ۱۱\,]$ ، عدد ۵ عضو اول ، عدد ۷ عضو دوم ، عدد ۸ عضو سوم و عدد ۱۱ عضو چهارم این ماتریس نامیده میشود .

۳ـ اگر دریك‌ماتریس $m \times n$ داشته‌باشیم $n = ۱$، دراین‌صورت یك‌ماتریس$m \times ۱$خواهیم داشت؛ چنین ماتریسی که دارای m سطر ویك ستون است یك ماتریس ستونی نامیده می‌شود .

در زیر چند ماتریس ستونی نوشته شده است :

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ \vdots \\ m \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۷ \\ ۸ \\ ۱۱ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

ماتریس ستونی$m \times ۱$ ماتریس ستونی۴×۱   ماتریس ستونی۳×۱   ماتریس ستونی۲×۱

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

در ماتریس روبه رو ، عدد ۳ عضو اول ، عدد ۲ عضو دوم ، عدد ۱ — عضوسوم وصفر عضو چهارم این ماتریس نامیده می‌شود .

۴ـ هرگاه در یك ماتریس $m \times n$ داشته باشیم $m = ۱$ و $n = ۱$ ، آن‌گاه یك ماتریس ۱×۱ به‌دست می‌آید بنابرقرارداد چنین ماتریسی مساوی عدد داخل‌کروشه

گرفته می‌شود :

$$\underset{1\times 1}{\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}} = 2 \quad , \quad \underset{1\times 1}{\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}} = 3$$

ماتریسها را معمولا باحروف بزرگ الفبا : A ، B ، C ، . . . نمایش می‌دهند .

بطورکلی یك ماتریس $1 \times n$ بصورت زیر است :

$$[a_{11}\ a_{12} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot a_{1n}] \qquad (2)$$

a_{11} عضو اول ، a_{12} عضو دوم و ... و بالاخره a_{1n} عضو n ام ماتریس (۲) نامیده می‌شود.

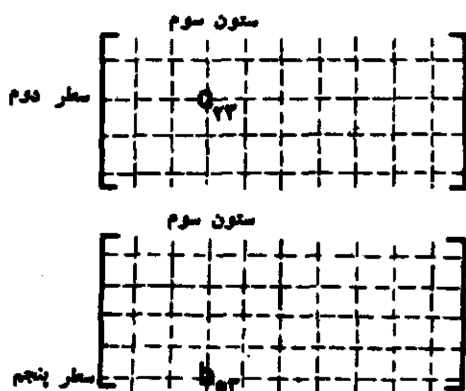
همچنین یك ماتریس $m \times 1$ بصورت زیراست

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{m1} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

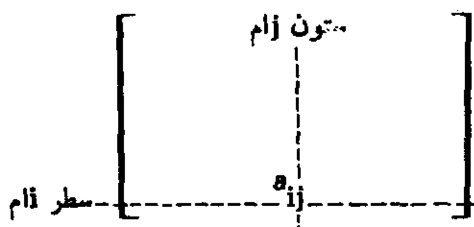
b_{11} عضواول ، a_{12} عضودوم‌و... وبالاخره b_{m1} عضو m ام ماتریس(۳) نامیده‌می‌شوند.

عضو عمومی یك ماتریس

فرض‌کنیم A یك ماتریس $m \times n$ باشد عضوی ازاین ماتریس که در سطردوم وستون سوم قرارگرفته است با a_{23} نمایش می‌دهند. (۲۳ انــدیس حرف a نامیده می‌شود.) عدد سمت چپ



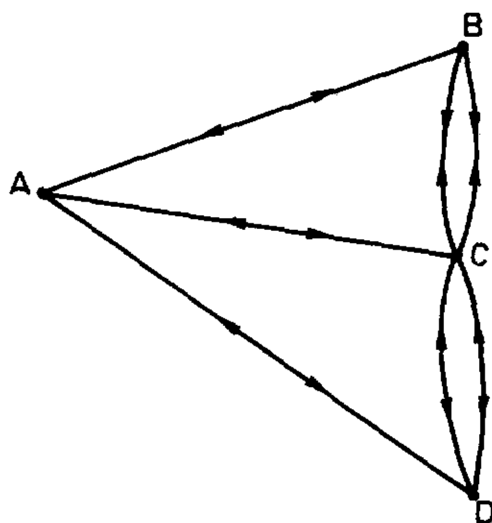
اندیس، نمایش ترتیب سطروعدد سمت راست نمایندهٔ ترتیب ستونی است که‌آن عضودرآنها قرار گرفته است. به‌همین ترتیب b_{53} عضوی است‌که درسطرپنجم وستون سوم قرارگرفته است:



درحالت کلی عضوی از ماتریس را که درسطر iام و ستون j ام (i و j اعداد طبیعی هستند) قرار گرفته است عضو عمومی ماتریس نامیده و با a_{ij} نمایش می‌دهیم.

گفتیم که ماتریس موارد استعمال فراوان دارد . در زیر ضمن دو مثال کاربرد دیگری از ماتریس آمده است .

مثال ۱ ـ شکل زیر چهار شهر A ، B ، C و D وجاده‌های بین آنها را نشان می‌دهد . از شهر A سه جاده شروع شده که هرکدام به یکی از شهرهای B ، C و D می‌رود . ازشهرB نیز سه جاده شروع شده که یکی به A و دو جادهٔ دیگر به C می‌رود . به همین ترتیب از هرشهر جاده‌هایی شروع و به شهرهای دیگر منتهی شده است .



در اینجا منظور از جادهٔ بین دو شهر جاده‌ای است که مستقیماً و بدون واسطه آن دوشهر را به هم مربوط می‌سازد . مثلا بین B و C دو جادهٔ بدون واسطه یا به طور ساده دو جاده وجود دارد ولـی بین B و D جادهٔ بدون واسطه یا به‌طور ساده جاده وجود ندارد. طبق قرارداد هرگاه بین دو شهر جاده وجود نداشته باشد جادهٔ آنهارا صفر انتخاب می‌کنند . همچنین جادهٔ هرشهر به خودش را نیـز صفر می‌گیرند . با این قرارداد و استفاده از ماتریسها جاده‌های بین شهرهای A ، B ، C و D به صورت زیر نمایش داده می‌شود :

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

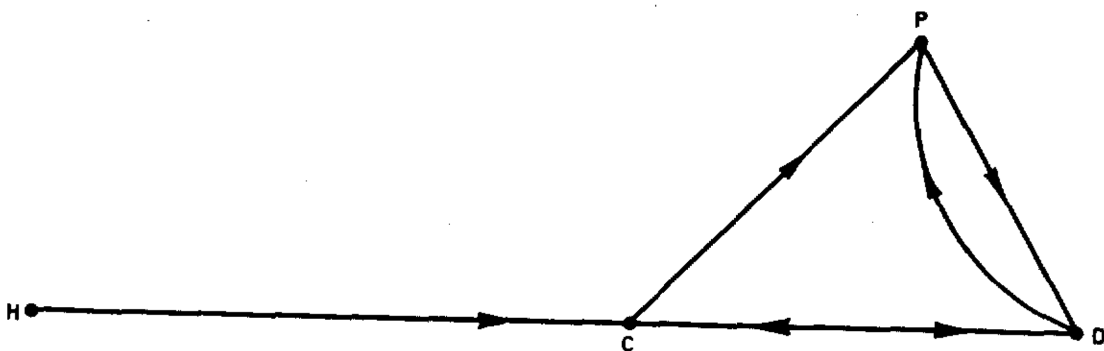
این ماتریس به نام ماتریس شبکهٔ[1] مستقیم خوانده می‌شود . برعکس با در دست داشتن ماتریس شبکهٔ مستقیم بین چند شهر می‌توان آن شبکه را رسم‌کرد .

مثال ۲ ـ ماتریس شبکهٔ مستقیم بین شهرهای H ، C ، D و P به‌صورت زیرنمایش داده شده است :

	H	C	D	P
H	۰	۱	۰	۰
C	۱	۰	۱	۱
D	۰	۱	۰	۲
P	۰	۱	۲	۰

شبکهٔ آن را رسم‌کنید :

با توجه به قراردادهایی که در این زمینه شده است ، شبکهٔ این ماتریس به صورت زیر خواهد بود :



۱ـ شبکه مجموعه‌ای ازقوسها (یا پاره خطها) است به قسمی‌که این قوسها (یاپاره‌خطها) فقط در انتهای خود با یکدیگر مشترك باشند . هرقوس (یا پاره خط) را یال شبکه و هرانتهای آنها را رأس شبکه می‌گویند . رأس شبکه را گره نیز می‌گویند . هریك از شکلهای بالا یك شبکه است .

تمرین

۱ـ دایرهٔ آمار یك سازمان اطلاعات مربوط به تحصیلات کارمندان و مستخدمین سازمان را به صورت زیر گزارش داده است :

میزان تحصیلات / افراد	فوق‌لیسانس	لیسانس	فوق‌دیپلم	دیپلم	پنج ابتدایی	کمتر از پنج ابتدایی
مسئولین قسمتها	۰/۴	۴/۵	۳۲/۷	۴۹/۸	۱۲/۶	۰
تکنسینها و متخصصین	۷/۱	۲۵	۴۵	۲۱/۵	۱/۴	۰
منشیها و کارمندان دفتری	۰/۱	۰/۶	۲۰/۴	۷۳/۳	۵/۵	۰/۱
فروشندگان و کارکنان شرکت تعاونی	۰	۰	۰	۳۴/۳۵	۵۷	۸/۶۵
مأمورین تلفنخانه و رانندگان	۰	۰	۰	۳/۱	۳۹/۹	۵۷
خدمتگزاران	۰	۰	۰	۰	۵۲/۵	۴۷/۵

الف ـ اطلاعات فوق را به‌صورت یك ماتریس نشان دهید. ب ـ تعداد سطرها و ستونهای این ماتریس را معین کنید .

۲ـ در جدول زیر بعضی از مشخصات جغرافیایی پنج قارهٔ عالم نوشته شده است :

مشخصات / قاره	مساحت برحسب کیلومتر مربع	جمعیت	بلندترین ارتفاع برحسب متر
آسیا	۴۴,۱۵۰,۰۰۰	۱۵۹,۸۹۰,۰۰۰	۷,۸۴۸ متر
افریقا	۳۰,۵۰۰,۰۰۰	۲۳۵,۵۰۰,۰۰۰	۵,۸۹۵ »
امریکا	۴۱,۹۸۰,۰۰۰	۳۸۷,۷۲۰,۰۰۰	۶,۹۵۹ »
اروپا	۱۰۰,۵۰۰,۰۰۰	۵۶۵,۴۰۰,۰۰۰	۴,۸۱۰ »
اقیانوسیه	۸,۹۶۵,۰۰۰	۱۶,۱۸۰,۰۰۰	۴,۰۰۰ »

اطلاعات این جدول را به‌صورت یك ماتریس نمایش دهید .

به صورت $m \times n$ بیان کنید .

۳- یك ماتریس ۴×۴ بنویسید که عضوهای آن حروف الفبای لاتین باشد .

۴- ماتریس رو به‌رو داده شده است ، عضوهای زیر را مشخص سازید :

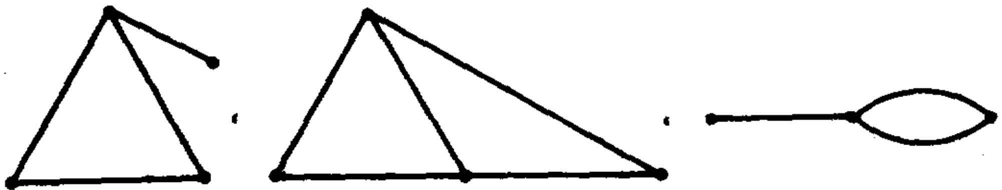
$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۵ & ۱۱ \\ ۴ & ۵ & ۶ & ۹ & ۱ \\ ۱ & ۷ & ۰ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$a_{۲۴}$ ، $a_{۳۵}$ ، $a_{۱۱}$ ، $a_{۱۴}$ ، $a_{۲۵}$ ، $a_{۳۲}$

۵- در ماتریس رو به رو به جای « ? » عضو مناسب به صورت a_{ij} بگذارید :

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & ? & ? & a_{۱۴} \\ a_{۲۱} & ? & ? & ? \\ ? & ? & a_{۲۳} & ? \end{bmatrix}$$

۶- در زیر چند شبکهٔ مستقیم رسم شده است. ماتریسهای هریك را بنویسید :



۷- درزیرماتریس چند شبکهٔ مستقیم نوشته شده است، شبکهٔ مربوط به‌هریك راجداگانه رسم کنید :

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۲ \\ ۰ & ۲ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۸- ماتریسی ۳×۳ بنویسید که همهٔ عضوهای آن صفرباشد. چه اسمی برای این‌ماتریس پیشنهاد می‌کنید ؟

تساوی دو ماتریس

اگر

ستون j ام

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & & & & \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & & \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

سطر i ام

و

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

(ستون j ام — سطر i ام)

دوماتریس $m\times n$ باشند، a_{ij} و b_{ij} $(i=1, 2, \ldots, m$ و $j=1, 2, \ldots, n)$ عناصر متناظر دوماتریس A و B نامیده میشوند. برای‌مثال a_{32} و b_{32} دوعنصر متناظر از دوماتریس B و A میباشند.

تعریف ـ دوماتریس B و A را مساوی‌گوئیم ومینویسیم $A=B$ ، هرگاه

الف ـ تعداد سطرهای دوماتریس باهم و تعداد ستونهای‌آنها با هم برابر باشند (یعنی‌اینکه B و A دوماتریس $m\times n$ باشند).

ب ـ عضوهای متناظر دو ماتریس مساوی باشند .

مثلاً ، تساوی زیر :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

فقط وقتی درست است که داشته باشیم : $a=2$ ، $b=3$ ، $c=5$ و $d=6$.

در زیر دو مثال دیگر از ماتریسهای مساوی نوشته شده است:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{4} & 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{4} & 4-1 \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} \sqrt{4} & \sqrt{9} \\ 3 & 2-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \frac{9}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

مثال ـ در تساوی زیر x و y را به قسمی پیداکنیدکه دو ماتریس مساوی شوند :

$$\begin{bmatrix} x+y & 3 \\ x-y & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

حل ـ این دو ماتریس هردو 2×2 بوده و ستونهای دوم آنها یکی است ، پس باید داشته باشیم :

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow x=4 \text{ و } y=1$$

هرگاه یکی از دو شرط تساوی دو ماتریس‌که دربالاگفته شد برقرار نباشد ، آن‌گاه دو

ماتریس مساوی نخواهند بود . مثال :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جمع ماتریسها

شرکتی برای کارمندان دولت در شهرهای شیراز ، اصفهان و اهواز خانه‌های سازمانی ۴ اتاقی (نوع A) و ۵ اتاقی (نوع B) می‌سازد. این شرکت برای ساختن خانه‌های سازمانی در دو سال قراردادی به صورت زیرامضاکرده است :

شهر	سال اول		سال دوم	
	نوع A	نوع B	نوع A	نوع B
شیراز	۸۰ دستگاه	۳۰ دستگاه	۶۰ دستگاه	۳۰ دستگاه
اصفهان	۴۰ دستگاه	۵۰ دستگاه	۲۰ دستگاه	۷۰ دستگاه
اهواز	۳۰ دستگاه	۳۰ دستگاه	۴۰ دستگاه	۳۰ دستگاه

متن این قرارداد را برای هرسال می‌توان با یک ماتریس نشان داد :

نوع A   نوع B

$$P = \begin{bmatrix} 80 & 30 \\ 40 & 50 \\ 30 & 30 \end{bmatrix} ،$$

نوع A   نوع B

$$Q = \begin{bmatrix} 60 & 30 \\ 20 & 70 \\ 40 & 30 \end{bmatrix}$$

ممکن است شخصی سؤال کندکه این شرکت در دو سال روی هم رفته از هرنوع خانه درهرشهرستان چند دستگاه خواهد ساخت. طبیعی است که برای پاسخ به‌این سؤال بایدعضوهای متناظر دو ماتریس P و Q را باهم جمع کرد .

$$P+Q=\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{matrix} A & B \\ \left[\begin{matrix} ۸۰ & ۳۰ \\ ۴۰ & ۵۰ \\ ۳۰ & ۳۰ \end{matrix}\right] \end{matrix}+\begin{matrix} A & B \\ \left[\begin{matrix} ۶۰ & ۳۰ \\ ۲۰ & ۷۰ \\ ۴۰ & ۳۰ \end{matrix}\right] \end{matrix}$$

$$=\left[\begin{matrix} ۸۰+۶۰ & ۳۰+۳۰ \\ ۴۰+۲۰ & ۵۰+۷۰ \\ ۳۰+۴۰ & ۳۰+۳۰ \end{matrix}\right]$$

$$=\left[\begin{matrix} ۱۴۰ & ۶۰ \\ ۶۰ & ۱۲۰ \\ ۷۰ & ۶۰ \end{matrix}\right]$$

$$=R$$

در اینجا ماتریس R به نام مجموع دو ماتریس P و Q خوانده می‌شود . هـرکدام از ماتریسهای P و Q (عاملهای جمع) به صورت ۲×۳ بوده درنتیجه R (مجموع دو ماتریس) نیزیك ماتریس ۲×۳ است‌وهرعضوآن برابر مجموع عضوهای متناظرآن در P و Q می‌باشد.

تعریف ـ فرض‌کنیم A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند . (یعنی این‌که تعداد سطرها با هم و تعداد ستونها با هم مساوی می‌باشند) مجموع A و B یك ماتریس $m \times n$ است مانند C به‌طوری که هرعضوآن مساوی مجموع عضوهای متناظرش در A و B باشد .

مثال ۱ ـ دو ماتریس زیر داده شده‌اند ؛ ماتریس A+B را بنویسید .

$$A=\left[\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}\right] \text{ و } B=\left[\begin{matrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{matrix}\right]$$

حل ـ چون هریك از ماتریسهای A و B به صورت ۲×۳ می‌باشد ، پس عمل جمع تعریف شده است وطبق آنچه گفته شد داریم :

$$A+B=\underset{۲\times۳}{\left[\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \end{matrix}\right]}+\underset{۲\times۳}{\left[\begin{matrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{matrix}\right]}$$

$$=\underset{۲\times۳}{\left[\begin{matrix} a+۱ & b+۲ & c+۳ \\ d+۴ & e+۵ & f+۶ \end{matrix}\right]}$$

جمع دو ماتریس که تعداد سطرهای آنها یا تعداد ستونهای آنها باهم برابر نباشد تعریف نشده است .

مثال ۲ ـ دو ماتریس زیر داده شده‌اند ؛ ماتریس $A+B$ را بنویسید .

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

حل ـ در اینجا A یك ماتریس ۲ × ۲ و B یك ماتریس ۳ × ۲ است . پس طبق آنچه گفته شد $A+B$ تعریف نشده است .

اگر A یك ماتریس باشد، تعریف می‌کنیم :

$$۲A=۲\times A=A+A$$

ضرب یك عدد در یك ماتریس

مثال ۱ ـ ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ داده شده است ؛ ماتریس $۲\times A$ را بنویسید .

طبق تعریف :

$$۲\times A=A+A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۴+۴ & ۳+۳ \\ ۵+۵ & ۶+۶ \end{bmatrix}$$

(بنابه تعریف ضریب اعداد) :

$$=\begin{bmatrix} ۲\times۴ & ۲\times۳ \\ ۲\times۵ & ۲\times۶ \end{bmatrix}$$

یعنی برای تعیین ماتریس $۲A$ ، عدد حقیقی ۲ را باید در تمام عضوهای A ضرب کرد.

تعریف ـ عدد حقیقی r وماتریس A داده شده است؛ منظور از rA ویا $r\times A$ ماتریسی است که ازضرب عدد r درهر عضو A به دست می‌آید .

مثال ۱ـ هرگاه $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، داریم :

(r عدد حقیقی است)

$$r.A=r\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{bmatrix}$$

باید توجه داشت که برخلاف عمل جمع دوماتریس ، ضرب یك عدد دریك ماتریس همیشه امکان‌پذیر است .

مثال ۲ـ اگر $A=\begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ، خواهیم داشت :

$$\frac{۴}{۳}A=\frac{۴}{۳}\begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴ & \frac{۸}{۳} \\ \frac{۴}{۳} & ۰ \end{bmatrix}$$

قرینهٔ یك ماتریس

گفتیم که برای ضرب عددحقیقی r در ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، عدد r را در هریك ازعضوهای A ضرب می‌کنیم .

هرگاه $r=-۱$ ، خواهیم داشت :

$$-۱\times A=-۱\times\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

ماتریس $-۱\times A$ را با $-A$ نمایش داده آن را قرینهٔ ماتریس A می‌خوانند .

$$-A=\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

قرینهٔ ماتریس A ، ماتریسی است که هرعضو آن قرینهٔ عضو متناظرش در A باشد .

مثال ـ

قرینهٔ ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۰ \\ ۳ & ۰ & -۴ \end{bmatrix}$ برابراست با $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & ۰ \\ -۳ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$

ماتریس صفر

از جمع دو ماتریس A و $-A$ ماتریسی به دست می‌آید که همهٔ عضوهای‌آن صفر است. چنین ماتریسی به نام ماتریس صفر خوانده می‌شود .

مثال ـ هرگاه $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ ، داریم :

$$A+(-A)=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a+(-a) & b+(-b) & c+(-c) \\ d+(-d) & e+(-e) & f+(-f) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

در حالت‌کلی ماتریس صفر را به صورت $\overline{O}_{m\times n}$ ویا $\overline{O}$ نمایش می‌دهند :

$$A+(-A)=\overline{O}$$

در زیر چند ماتریس صفر نوشته شده است :

$$\overline{O}_{۲\times۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} ، \overline{O}_{۳\times۳}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} ، \overline{O}_{۲\times۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

بااستفاده ازقرینهٔ یك ماتریس تفاضل دوماتریس A و B را به صورت زیرتعریف می کنیم:

$$A-B=A+(-B)$$

مثال ـ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$ داده شده است ؛
مطلوب است محاسبهٔ $۳A-۲B$

$$۳A-۲B=۳\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ -۲ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۱ & ۶ \end{bmatrix}$$

خواص جمع ماتریسهای ۲ × ۲

۱ ـ هرگاه A و B دوماتریس ۲ × ۲ باشند ، دیدیدکه مجموع این دو ماتریس نیز یك ماتریس۲ × ۲ است. به‌عبارت دیگر، از جمع دو ماتریس ۲ × ۲ یک ماتریس ۲ × ۲ به دست می‌آید ویا : مجموعهٔ ماتریسهای ۲ × ۲ نسبت به جمع ماتریسها بسته است .

۲ ـ جمع ماتریسهای ۲ × ۲ خاصیت شرکت‌پذیری دارد ، یعنی هرگاه $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$ سه ماتریس ۲ × ۲ باشند، خواهیم داشت:

$$\boxed{A+(B+C)=(A+B)+C}$$

برای نشان دادن درستی این تساوی طرف راست‌آن را محاسبه می‌کنیم :

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}\right)$$

جمع ماتریسها :
$$=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (e+m) & (f+n) \\ (g+p) & (h+q) \end{bmatrix}$$

جمع ماتریسها :
$$=\begin{bmatrix} a+(e+m) & b+(f+n) \\ c+(g+p) & d+(h+q) \end{bmatrix}$$

شرکت‌پذیری جمع در مجموعهٔ اعداد :
$$=\begin{bmatrix} (a+e)+m & (b+f)+n \\ (c+g)+p & (d+h)+q \end{bmatrix}$$

جمع ماتریسها :
$$=\begin{bmatrix} (a+e) & (b+f) \\ (c+g) & (d+h) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$$

جمع ماتریسها :
$$=\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$$

$$=(A+B)+C$$

۳ ـ ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، عضو بی‌اثر جمع در مجموعهٔ ماتریسهای ۲×۲ است .

یعنی این‌که هرگاه $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یك ماتریس ۲ × ۲ باشد، خواهیم داشت :

$$A+\bar{O}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جمع ماتریسها :
$$=\begin{bmatrix} a+0 & b+0 \\ c+0 & d+0 \end{bmatrix}$$

عضو بی‌اثر جمع در مجموعهٔ اعداد :
$$=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$=A$$

همچنین داریم :

$$\bar{O}+A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۰+a & ۰+b \\ ۰+c & ۰+d \end{bmatrix}$$ چرا ؟

$$=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ چرا ؟

$$= A$$

پس :

$$\boxed{A+\bar{O}=\bar{O}+A=A}$$

۴ـ در مجموعهٔ ماتریسهای ۲ × ۲ ، هر ماتریس A تنها دارای یک عضو قرینه A − است، بطوریکه داریم:

$$\boxed{A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}}$$

۵ـ جمع ماتریسهای ۲ × ۲ دارای خاصیت جابجایی است . یعنی اگر A و B دو ماتریس ۲ × ۲ باشند داریم :

$$\boxed{A+B=B+A}$$

۶ ـ هرگاه r و s دو عدد حقیقی و A و B دو ماتریس ۲ × ۲ باشند ، داریم :

$$r(A+B)=rA+rB \qquad (r+s)A=rA+sA$$

$$(rs)A=r(sA) \qquad ۱A=A$$

بعدها خواهید دیدکه خواص فوق به طورکلی برای مجموعهٔ ماتریسهای m × n نیز درست است .

تمرین

۱ـ حاصل هریك ازجمعهای زیر را (درصورتی‌که تعریف شده باشد) به دست آورید .

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ & ۷ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۱ ، ۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

۲ـ حاصل هریک ازعبارات زیر را به دست آورید :

$$۲\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}+۴\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix} ؛ \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}+۳\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} ؛ a\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$-۲\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}+\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} ؛ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}-۳\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

۳ ـ در هریک از تساویهای زیر هرگاه X یک ماتریس ۲×۲ باشد ، مطلوب است محاسبهٔ X .

$$X+۲\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} ؛ X-\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

۴ـ ماتریسهای زیر داده شده‌اند :

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۵ & ۱ & ۳ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} -۳ & ۴ & ۰ \\ ۰ & -۴ & ۳ \end{bmatrix} \text{ و } C=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبهٔ :

$$۲A+B-C ؛ ۳A+۲B-۴C ؛ -۲(A+۲C)-۳C ؛ -A+۲B$$

۵ـ ماتریسهای زیر داده شده‌اند :

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \text{ و } C=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مطلوب است محاسبهٔ : $A+B+C ؛ ۲A-B-۳C ؛ ۳(A-B)+C$

۶ـ ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۰ \\ ۴ & ۲ & \sqrt{۳} \end{bmatrix}$ داده شده است ؛ ماتریس kA را در حالات زیر بنویسید :

$$k=۳ ؛ k=-۲ ؛ k=۰ ؛ k=۲+\sqrt{۳}$$

۷ـ ماتریسهای زیر داده شده‌اند ؛

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ & ۰ \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ ۳ & ۴ & ۹ \end{bmatrix} \text{ و } C=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

نشان دهیدکه :

$$A+B=B+A \;;\; (A+B)+C=A+(B+C) \;;\; -۲(A+B)=-۲A-۲B$$

۸ـ ماتریس زیروعددحقیقی k داده شده‌است ؛ ماتریس kI را بنویسید .

$$I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۹ـ حاصل هریك ازعبارتهای زیررا به دست آورید :

الفـ

$$\cos\theta\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta\begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

بـ

$$\sqrt{۲}\begin{bmatrix} ۳\sqrt{۲} & ۲\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۱ & \sqrt{۲} \end{bmatrix} - \sin ۴۵^\circ \begin{bmatrix} \cos ۳۰^\circ & -\sin ۳۰^\circ & \cos ۴۵^\circ \\ \sin ۳۰^\circ & \cos ۳۰^\circ & \sin ۴۵^\circ \end{bmatrix}$$

ضرب یك ماتریس سطری در یك ماتریس ستونی

مثال ۱ ـ دانش‌آموزی برای‌خرید لوازم مدرسهٔ خود به یك لوازم‌التحریر فروشی رفت؛ او ۱۰ خودکار ، ۲۰ مداد و ۱۲ دفتر خرید ؛ در صورتی‌که بهای هرخودکار ۵ ریال وبهای هرمداد ۲ ریال و بهای هردفتر ۶ ریال باشد ، تعیین‌کنید او چه مبلغ در مغازهٔ لوازم‌التحریر فروشی خریدکرده است .

ارقام خریداری شده را می‌توان بایك ماتریس سطری به صورت زیرنمایش داد :

$$A=\begin{bmatrix} \overset{\text{خودکار}}{۱۰} & \overset{\text{مداد}}{۲۰} & \overset{\text{دفتر}}{۱۲} \end{bmatrix}$$

همچنین بهای هر واحد از این اجناس را ممکن است بایك ماتریس ستونی مشخص نمود:

$$B = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۶ \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{بهای یك خودکار} \\ \text{بهای یك مداد} \\ \text{بهای یك دفتر} \end{matrix}$$

طبق آنچه در حساب خوانده‌اید ، برای محاسبهٔ این خرید باید اعمال ضرب و جمع را به صورت زیر انجام داد :

بها خودکار   بها مداد   بها دفتر

(۱۰ × ۵) + (۲۰ × ۲) + (۱۲ × ۶) = ۱۶۲ ریال

این محاسبه درست عمل ضرب ماتریس A در B رانشان می‌دهدکه ممکن است‌به صورت زیر نوشته شود [۱] .

[۱۰   ۲۰   ۱۲] × [۵   ۲   ۶] = [۱۰ × ۵ + ۲۰ × ۲ + ۱۲ × ۶]

= [۵۰ + ۴۰ + ۷۲]

= [۱۶۲]

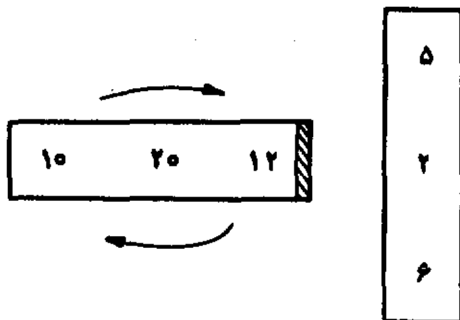
= ۱۶۲ ریال

یعنی : برای به دست آوردن حاصل ضرب دوماتریس فوق به ترتیب زیرعمل می‌کنیم :

- اولین عضو ماتریس سطری را در اولین عضو ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم .
- دومین عضو ماتریس سطری را در دومین عضو ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم .
- سومین عضو ماتریس سطری را در سومین عضو ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم .
- حاصل ضربهای به دست‌آمده را باهم جمع می‌کنیم .

۱- در این نوع مسائل همیشه ماتریس سطری اول نوشته می‌شود .

درشروع یادگیری این ضرب ، می‌توان‌حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix} ۱۰ ، & ۲۰ ، & ۱۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۶ \end{bmatrix}$ را به صورت مستطیلهای زیرنوشت :



سپس مستطیل‌سمت چپ را به اندازهٔ °۹۰ در جهت حرکت عقربهٔ‌ساعت‌دوران داده‌به صورت رو به روکنار یکدیگر قرار داد :

$$\begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۲۰ \\ ۱۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۶ \end{bmatrix} =$$

آن گاه عضوهایی را که مقابل یکدیگر قرار گرفته‌اند درهم ضرب‌کرده مجموع‌آنها را به دست آورد :

$$\begin{bmatrix} ۱۰ & ۲۰ & ۱۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ & ۲۰ & ۱۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۲۰ \\ ۱۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱۰\times۵ + ۲۰\times۲ + ۱۲\times۶ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۵۰ + ۴۰ + ۷۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱۶۲ \end{bmatrix} = ۱۶۲$$

مثال ۲ ـ خانم خانه‌داری برای خرید روزانه به یك خواربار فروشی رفت . نیم‌کیلو

پنیر ، ۲ کیلو شکر ، ۳ کیلو برنج و ۰/۵ کیلو لوبیا خرید کرد . در صورتی که پنیر کیلویی ۱۵۰ ریال ، شکر کیلویی ۲۵ ریال، برنج کیلویی ۴۲ ریال ولوبیا کیلویی ۳۰ ریال باشد، تعیین کنید این خانم چه مبلغ در این خواربار فروشی خریدکرده است .

همان‌طورکه دیدید ، ارقام خریدهای این خانم را می‌توان بایك ماتریس سطری وبهای هرکیلو از اجناس خریداری شده را با یك ماتریس ستونی نشان داد .

بهای یك کیلو پنیر	۱۵۰
بهای یك کیلو شکر	۲۵
بهای یك کیلو برنج	۴۲
بهای یك کیلو لوبیا	۳۰

؛

لوبیا	برنج	شکر	پنیر
۰/۵	۳	۲	۰/۵

از ضرب این دوماتریس مبلغی که خانم خریدکرده است به دست می‌آید :

$$\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۲ & ۳ & ۰/۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱۵۰ \\ ۲۵ \\ ۴۲ \\ ۳۰ \end{bmatrix} = \boxed{\begin{matrix} ۰/۵ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۰/۵ \end{matrix}} \times \boxed{\begin{matrix} ۱۵۰ \\ ۲۵ \\ ۴۲ \\ ۳۰ \end{matrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} ۰/۵ \times ۱۵۰ + ۲ \times ۲۵ + ۳ \times ۴۲ + ۰/۵ \times ۳۰ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۲۶۶ \end{bmatrix} = ۲۶۶ \text{ ریال}$$

توجه‌کنیدکه ضرب یك ماتریس سطری A در یك ماتریس ستونی B فقط وقتی تعریف شده است‌که تعداد ستونهای ماتریس A مساوی با تعداد سطرهای ماتریس B باشد .

قانون (۱) - اگر A یك ماترتس $۱ \times n$ و B یك ماتریس $n \times ۱$ باشد ، برای به دست آوردن حاصل‌ضرب AB به صورت زیر عمل می‌کنیم :

- اولین عضو ماتریس سطری را در اولین عضو ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم .
- دومین عضو ماتریس سطری را در دومین عضو ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم .

. . . .

- آخرین عضو ماتریس سطری را در آخرین عضو ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم .
- حاصل ضربهای به دست آمده را باهم جمع می‌کنیم :

در زیرچند مثال ازضرب ماتریسهای سطری در ستونی نوشته شده است :

الف-
$$\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۴ \\ ۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\times۴+(-۳)\times۹ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۸-۲۷ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -۱۹ \end{bmatrix} = -۱۹$$

ب-
$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ & ۴ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \\ ۷ \\ ۶ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱\times-۳+۳\times۲+۵\times۷+۴\times۶+۲\times۱ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -۳+۶+۳۵+۲۴+۲ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۶۴ \end{bmatrix} = ۶۴$$

ج- چون تعداد ستونهای ماتریس سمت چپ برابر تعداد سطرهای ماتریس سمت راست نیست لذا عمل ضرب تعریف نشده است .
$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \\ ۷ \end{bmatrix}$$

د- عمل ضرب روبرو نیز تعریف نشده است .
$$\begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۷ \end{bmatrix}$$

ضرب یك ماتریس دریك ماتریس ستونی

مثال ۱ - سوسن و یاسمین برای خرید به‌یك فروشگاه رفتند . سوسن ۳ کتاب داستان و یك خودنویس و یاسمین ۴ کتاب داستان و ۲ خودنویس خریدکرد . در صورتی که بهای هرکتاب داستان ۵۰ ریال وبهای هرخودنویس ۳۰۰ ریال باشد، تعیین‌کنید هریك از آنها چه مبلغ خریدکرده است .

تعدادکتاب وخودنویسهای خریداری شده به وسیلهٔ سوسن ویاسمین را می‌توان به‌صورت ماتریس زیر نشان داد :

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

(ستونها: کتاب، خودنویس — سطرها: سوسن، یاسمین)

همچنین بهای یک کتاب و یک خودنویس را به صورت ماتریس زیرنمایش می‌دهیم :

$$B=\begin{bmatrix} ۵۰ \\ ۳۰۰ \end{bmatrix}$$

(ریال — سطرها: بهای یک کتاب، بهای یک خودنویس)

برای تعیین مبلغ خرید هریک ، طبق آنچه در حساب خوانده‌اید ، باید تعـدادکتابها و خودنویسهای خریداری شده به وسیلهٔ هرنفررا در قیمت مربوط به‌آنها ضرب‌کرد :

تعدادهرکتاب بهای‌هرکتاب تعدادخودنویس بهای‌هرخودنویس

خرید سوسن : $۳ \times ۵۰ + ۱ \times ۳۰۰ = ۴۵۰$ ریال

خریدیاسمین : $۴ \times ۵۰ + ۲ \times ۳۰۰ = ۸۰۰$ ریال

این محاسبات درست عمل ضرب $A \times B$ را نشان می‌دهد (عمل‌ضرب تعریف شده است. چرا؟)

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵۰ \\ ۳۰۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳\times ۵۰+۱\times ۳۰۰ \\ ۴\times ۵۰+۲\times ۳۰۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴۵۰ \\ ۸۰۰ \end{bmatrix}$$

(سطرها: خرید سوسن ، خریدیاسمین)

چگونگی عمل ضرب در زیر تشریح شده است :

ماتریس مربع سمت چپ را به صورت دو ماتریس سطری ، یکی مربوط به خرید سوسن ودیگری مربوط به خرید یاسمین تجزیه نموده هرکدام ازآنها رابه‌طورجداگانه طبق‌قانون(۱) در ماتریس ستونی سمت راست ضرب می‌کنیم :

الف ـ خرید سوسن :

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵۰ \\ ۳۰۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳\times ۵۰+ ۱\times ۳۰۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴۵۰ \end{bmatrix}$$

ب ـ خرید یاسمین :

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۵۰ \\ ۳۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\times۵۰ + ۲\times۳۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸۰۰ \end{bmatrix}$$

یا به طور خلاصه :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۵۰ \\ ۳۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳\times۵۰ + ۱\times۳۰۰ \\ ۴\times۵۰ + ۲\times۳۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴۵۰ \\ ۸۰۰ \end{bmatrix}$$

قانون (۲) ـ اگر A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times ۱$ باشد ، حاصل‌ضرب A در B به صورت زیربه دست می‌آید .

ـ سطر اول آن ماتریس را درماتریس ستونی ضرب‌کرده ، عدد حاصل را عضو اول حاصل ضرب قرار می‌دهیم .

ـ سطر دوم آن ماتریس را در ماتریس ستونی ضرب کرده ، عدد حاصل را عضو دوم حاصل ضرب قرار می‌دهیم .

....

ـ سطر n ام آن ماتریس را در ماتریس ستونی ضرب‌کرده ، عدد حاصل را عضو n ام حاصل ضرب قرار می‌دهیم .

مثال ۲ـ دو ماتریس زیر داده شده‌اند ، ماتریس $A \times B$ را بنویسید .

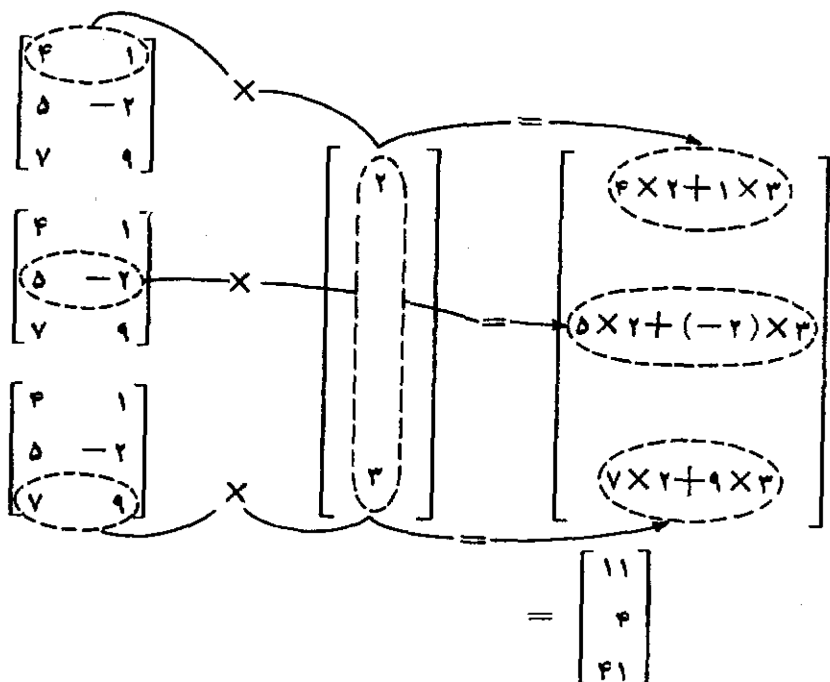
$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & ۵ \\ ۹ & ۷ \end{bmatrix} \quad و \quad B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

الف ـ چون تعداد ستونهای A برابر تعداد سطرهای B است، لذا $A \times B$ تعریف شده است.

$$A . B = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۵ & -۲ \\ ۷ & ۹ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$۳ \times ۲ \qquad\qquad ۲ \times ۱$$

برای تعیین حاصل ضرب طبق قانون (۲) عمل می‌کنیم :



$$= \begin{bmatrix} ۱۱ \\ ۴ \\ ۴۱ \end{bmatrix}$$

آیا درمثال ۲، $B \times A$ تعریف شده است ؟

ضرب یک ماتریس $m \times p$ دریک ماتریس $p \times n$.

مثال ۱ ـ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ داده شده‌اند ، ماتریس $A \times B$ را بنویسید .

هرکدام از ماتریسهای A و B ، ۲×۲ بوده درنتیجه $A \times B$ معنا دارد :

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

برای تعیین این حاصل‌ضرب، ماتریس‌سمت راست را به‌صورت دو ماتریس ستونی تجزیه کرده $A \times B$ را به شکل زیر می‌نویسیم .

الف- ستون اول $A \times B$: $\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$

ب- ستون دوم $A \times B$: $\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$

اکنون حاصل ضربهای فوق را طبق قانون (۲) به دست می‌آوریم :

الف- ستون اول $A \times B$: $\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \times ۲ + ۵ \times ۳ \\ ۳ \times ۲ + (-۲) \times ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۳ \\ ۰ \end{bmatrix}$

ب- ستون‌دوم $A \times B$: $\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \times ۱ + ۵ \times ۴ \\ ۳ \times ۱ + (-۲) \times ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۴ \\ -۵ \end{bmatrix}$

و یا به طور خلاصه :

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲۳ & ۲۴ \\ ۰ & -۵ \end{bmatrix}$$

ستون‌اول ستون‌دوم

قانون (۳) - اگر A یك ماتریس $m \times p$ و B یك ماتریس $p \times n$ باشد ، برای به دست آوردن ماتریس AB به صورت زیرعمل می‌کنیم .

- ماتریس B را به n ماتریس ستونی تجزیه می‌کنیم .
- ماتریس A را طبق قانون (۲) درهریك ازاین ماتریسهای ستونی ضرب می‌کنیم .
- حاصل ضربهای به دست‌آمده راکه به صورت ماتریسهای ستونی هستند ، ازچپ به راست ستونهای اول تا nام ماتریس حاصل ضرب قرار می‌دهیم .

مثال ۲ - دوماتریس $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ داده شده‌اند ماتریس $B \times A$ را بنویسید. چون دوماتریس داده شده ۲×۲ می‌باشند $B \times A$ تعریف شده است .

$$B \times A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$$

مانند مثال ۱ عمل می کنیم :

ستون اول حاصل ضرب:
$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\times ۴ + ۱ \times ۳ \\ ۳ \times ۴ + ۴ \times ۳ \end{bmatrix}$$

ستون دوم حاصل ضرب:
$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۵ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\times ۵ + ۱ \times -۲ \\ ۳ \times ۵ + ۴ \times -۲ \end{bmatrix}$$

ویا به طور خلاصه :

ستون دوم　　　ستون اول

$$B\times A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\times ۴ + ۱\times ۳ & ۲\times ۵ + ۱ \times -۲ \\ ۳\times ۴ + ۴ \times ۳ & ۳ \times ۵ + ۴ \times -۲ \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ۱۱ & ۸ \\ ۲۴ & ۷ \end{bmatrix}$$

در مثالهای (۱) و(۲) حاصل ضربهای $A \times B$ و $B \times A$ هر دو تعریف شده‌اند امـا مساوی نیستند :

$$A \times B \neq B \times A$$

واین درحالت‌کلی نیز درست است یعنی : ضرب ماتریسها خاصیت جابجائی ندارد .

مثال۳- دوماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ $= A$ و $B= \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}$ داده شده‌اند ، حاصل ضرب $A\times B$ را بنویسید .

دراینجا تعداد ستونهای‌ماتریسA برابربا تعداد سطرهای ماتریسB است و داریم :

$$A\times B = \underset{۲\times ۲}{\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}} \times \underset{۲\times ۳}{\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix}} = \underset{۲\times ۳}{\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}}$$

این حاصل ضرب طبق قانون (۳) به دست می‌آید .

ستون اول حاصل‌ضرب:
$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\times ۱ + ۳ \times ۲ \\ ۰ \times ۱ + ۵ \times ۲ \end{bmatrix}$$

ستون دوم حاصل ضرب:
$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\times ۳ + ۳ \times ۴ \\ ۰ \times ۳ + ۵ \times ۴ \end{bmatrix}$$

ستون سوم حاصل‌ضرب: $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\times۵+۳\times۶ \\ ۰\times۵+۵\times۶ \end{bmatrix}$

ویا به طور خلاصه :

ستون‌سوم ستون‌دوم ستون‌اول

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۱۸ & ۲۸ \\ ۱۰ & ۲۰ & ۳۰ \end{bmatrix}$$

آیا دراین مثال حاصل‌ضرب $B \times A$ تعریف شده است ؟

ماتریس واحد

دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ داده شده‌اند ، مطلوب است محاسبهٔ $I \times A$ و $A \times I$.

حاصل ضرب $I \times A$ را به دست می‌آوریم :

$$I \times A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱\times a+۰\times c & ۱\times b+۰\times d \\ ۰\times a+۱\times c & ۰\times b+۱\times d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= A$$

به همین ترتیب $A \times I$ را محاسبه می‌کنیم :

$$A \times I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a\times۱+b\times۰ & a\times۰+b\times۱ \\ c\times۱+d\times۰ & c\times۰+d\times۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+۰ & ۰+b \\ c+۰ & ۰+d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= A$$

در اینجا می‌بینیدکه :

$$A \times I = I \times A = A$$

ماتریس $I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ماتریس واحد ضرب در مجموعه ماتریسهای ۲ × ۲ نامیده می‌شود .

در این ماتریس عضوهای یك از چپ به راست روی خطی قرارگرفته‌اندکه به نام قطر اصلی ماتریس خوانده می‌شود . پس :

هرماتریس مربع $n \times n$ که عضوهای قطراصلیش یك وسایرعضوهای آن صفرباشدبه‌نام ماتریس واحد خوانده شده‌آن را با $I_{n \times n}$ یا به طور ساده I نمایش می‌دهند .

در زیرچند ماتریس واحد نوشته شده است :

$$I_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} ، \quad I_{۴\times۴} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

قطراصلی — قطراصلی

دترمینان ماتریسهای ۲ × ۲

در ماتریس :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

عدد $ad - bc$ (تفاضل حاصل ضرب اعدادی که روی دو قطر ماتریس قرار دارند) به‌نام دترمینان ماتریس A خوانده شده آن را با $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ یا $|A|$ یا Δ نمایش می‌دهند :

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال ـ در زیر دترمینان چند ماتریس ۲ × ۲ نوشته شده است :

$$\begin{vmatrix} ۵ & ۶ \\ ۷ & ۳ \end{vmatrix} = ۵ \times ۳ - ۶ \times ۷$$

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix} = ۳ \times ۱ - ۲ \times ۰$$

$$\begin{vmatrix} ۴ & ۶ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} = ۴ \times ۳ - ۶ \times ۲$$

باید توجه داشت که ماتریس یك جـدول آرایش اعداد است[۱] . درصورتی‌کـه دترمینان یك عدد می‌باشد .

تمرین

(تمرینات ۱ تا ۴ را بااستفاده از ضرب ماتریسها حل‌کنید) .

۱ـ یك‌کارخانه ازسه نوع سوخت ، نفت، بنزین وگازوئیل استفاده می‌کند . این‌کارخانه در هفته ۴۲۰ لیتر نفت ، ۱۰۰۰ لیتر بنزین و ۱۴۰۰ لیتر گازوئیل مصرف دارد . درصورتی که نفت لیتری ۲/۵ ریال ، بنزین لیتری ۶ ریال و گازوئیل لیتری ۳ ریال باشد ، تعیین‌کنید هزینهٔ سوخت هفتگی این‌کارخانه را .

۲ـ خانم خانه‌داری از خواربار فروشی محل ۰/۵ کیلوکره ، یك‌کیلو پنیر ، ۵ کیلو شکر و ۱۵ کیلو برنج به قیمتهای زیر خریدکرد :

کره‌کیلویی ۲۴۰ ریال ، پنیرکیلویی ۱۵۰ ریال ، شکرکیلویی ۲۸ ریال و برنج‌کیلویی ۶۵ ریال .

اگر این خانم ۵۰ ریال هزینهٔ رفت وبرگشت به یك فروشگاه تعاونی می‌پرداخت ، قادر بود این اجناس را در یك فروشگاه تعاونی به قیمتهای زیر بخرد :

کره‌کیلویی ۲۲۰ ریال ، پنیرکیلویی ۱۳۰ ریال ، شکرکیلویی ۲۴ ریال وبرنج‌کیلویی ۵۸ ریال .

تعیین‌کنید اگر این خانم خرید دوم را ترجیح می‌داد ، چقدر به صرف او تمام می‌شد.

۳ـ یك‌کارخانه سه نوع رادیوی قابل حمل تولید می‌کند: رادیو ترانزیستوری یك موج (مدل A)، رادیو ترانزیستوری دو موج (مدل B) و رادیوترانزیستوری‌سه موج (مدلC) . رادیوی مدل A شامل یك ترانزیستور ، ۱۰ مقاومت و ۵ خازن ؛ رادیوی مدل B شامل ۲ ترانزیستور ، ۱۸ مقاومت و ۷ خازن و رادیوی مدل C شامل ۳ ترانزیستور ، ۲۴ مقاومت و ۱۰ خازن است .

هرگاه فروش هفتگی این کارخانه ازسه نوع رادیوی A ، B و C به ترتیب ۱۰۰ ، ۲۵۰ و ۸۰ دستگاه باشد معین کنید مصرف ترانزیستور ، مقاومت و خازن این کارخانه را در یك هفته .

۱ـ فقط ماتریس ۱ × ۱ را طبق قرارداد مساوی عدد می‌گیریم .

۴ـ ضربهای زیررا انجام دهید :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} -۳ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

۵ـ تعداد سطرها وستونهای هریك ازحاصل‌ضربهای زیررا به دست آورید :

الف ـ ماتـریس ۲×۳ در ۴×۲ ؛ ب ـ ماتریس ۲×۸ در ۹×۲ ؛ ج ـ ماتریس ۳×۲ در ۲×۳ .

۶ـ ضربهای زیررا انجام دهید :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۶ & ۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۶ & ۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ \\ ۸ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۷ـ درتساویهای زیر مقدار x را به دست‌آورید :

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ a & b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{b} \\ \frac{۱}{۵} \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ ۹ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۵ \\ ۱۸ \end{bmatrix}$$

۸ـ درهریك از تساویهای زیر مقادیر a و b را به دست‌آورید :

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۱ & a \\ ۲ & b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

۹ـ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ داده شده‌اند؛ نشان دهید که $A \times B \neq B \times A$.

۱۰- ماتریسهای $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ داده شده‌اند ؛ نشان دهید که :

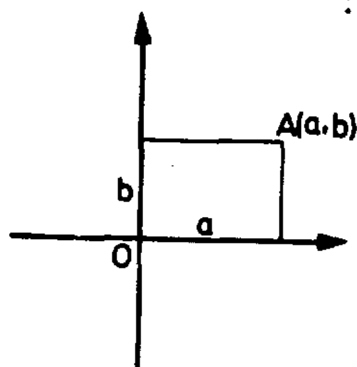
$$A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$$

۱۱- ماتریس $M=\begin{bmatrix} -۴ & ۱ \\ ۲ & ۶ \end{bmatrix}$ داده شده است ؛ هرگاه قرار دهیم $M\times M=M^۲$ ، ماتریس $M^۲$ را بدست آورید .

ماتریس نقاط

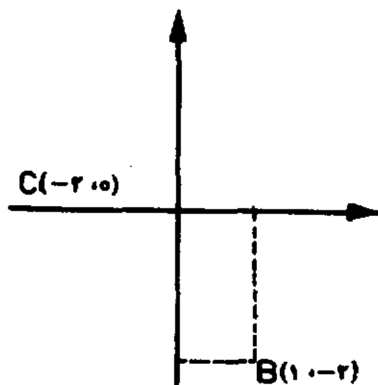
گفتیم که ماتریس کاربرد فراوان دارد . حال می‌خواهیم بعضی از این کاربردها را در هندسه مورد مطالعه قرار دهیم :

درصفحهٔ مختصات ، نقطهٔ A نظیر زوج مرتب (a ، b) ازعددهای حقیقی را می‌توان بایك ماتریس ۱ × ۲ به صورت زیر نشان داد :



$$A \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

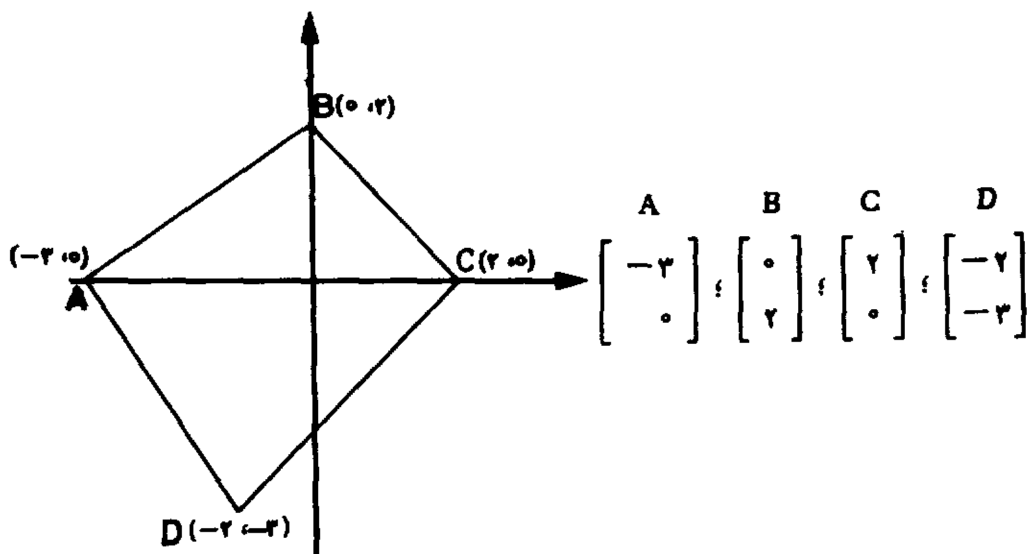
درزیر ، بااین قرارداد ، زوجهای نظیر نقاط B و C باماتریس نشان داده شده‌اند :



$$B \quad \begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix} \quad ؛ \quad C \quad \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

می‌دانیم که یك چند ضلعی با رأسهایش مشخص می‌شود و مختصات هررأس را نیز با

ماتریس $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ نمایش می‌دهند . بنابراین برای نمایش یك چند ضلعی می‌توان از ماتریس استفاده‌کرد . در چهار ضلعی زیر ، مختصات رأسها بااستفاده از ماتریس نوشته شده است .



$$\begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} -۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$$

حال این مختصات را به ترتیب از A به D ستونهای اول تاچهارم یك ماتریس ۴×۲ قرار می‌دهیم :

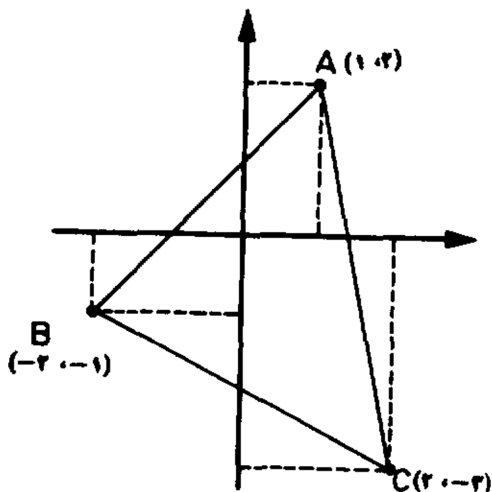
$$\begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} -۳ & ۰ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$$

این ماتریس‌که برای نمایش چهارضلعی ABCD به‌کار رفته است به نام ماتریس نقاط خوانده می‌شود. بااین قرارداد ماتریس قطر AC در شکل فوق برابر است با $\begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

مثال ـ مثلث ABC با ماتریس زیر مشخص شده است ، شکل آن را رسم‌کنید :

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۲ \\ ۲ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

ستونهای این ماتریس ازچپ به راست به ترتیب مختصات رئوس A ، B و C می‌باشند:



A B C

$$\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} -۲ \\ -۱ \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$$

حال نمودار هرنقطه را درصفحه به دست آورده نقاط حاصل را به هم وصل می‌کنیم :

تبدیلات و ماتریسها

دیدیدکه نقطهٔ P (a ، b) را به صورت ماتریس ستونی $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ نمایش دادیم ، ازضرب

یك ماتریس ۲ × ۲ در $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ به صورت زیر :

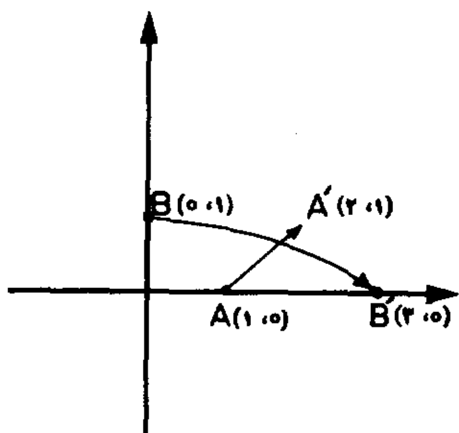
$$\begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

یك ماتریس ستونی جدید مثل $\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$ به دست می‌آید که نظیر نقطهٔ P′ (a′ ، b′) می‌باشد . نقطهٔ P′ را تبدیل یا تصویر نقطهٔ P تحت آن ماتریس می‌خوانند . ماتریس $\begin{bmatrix} c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ که به نام ماتریس تبدیل خوانده می‌شود همواره در سمت چپ نوشته می‌شود .

مثلا هرگاه ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ را به ترتیب در ماتریس نقاط (۰ ، ۱) A و (۱ ، ۰) B ضرب‌کنیم ماتریس نقاط A′ و B′ به دست می‌آید :

A A′

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \times \overset{B}{\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}} = \overset{B'}{\begin{bmatrix} ۳ \\ ۰ \end{bmatrix}}$$

A' و B' به ترتیب تبدیلها یا تصاویر نقاط A و B تحت ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ بوده و پاره خط A' B' تصویر AB می‌باشد .

مثال ـ مربع ABCD باماتریس زیر مشخص شده است :

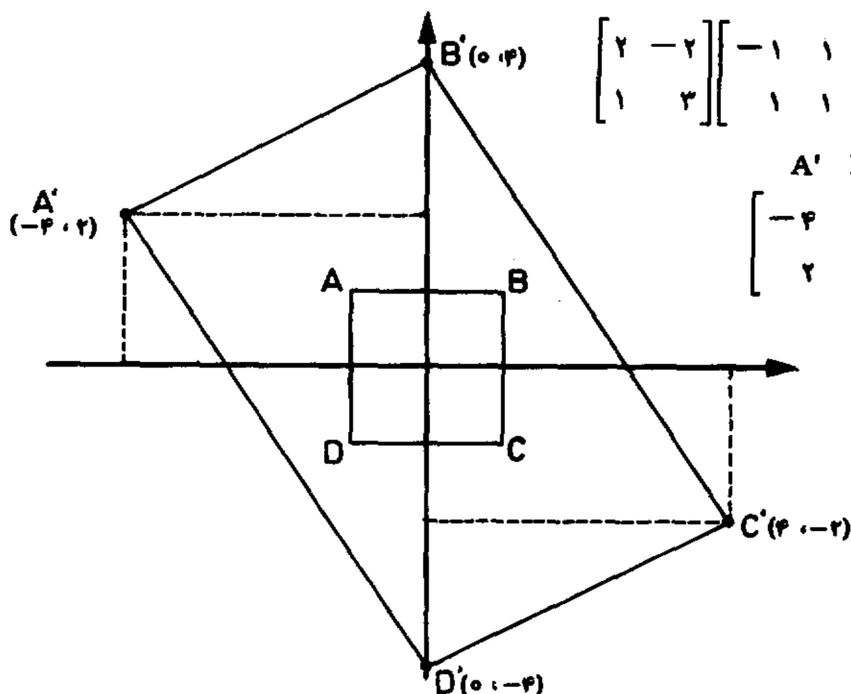
$$\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

تبدیل این مربع را تحت ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ به دست آورید .

طبق آنچه گفته شد ، کافی است ماتریس A را در ماتریس ۴×۲ فوق به صورت زیر ضرب کنیم :

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix} =$$

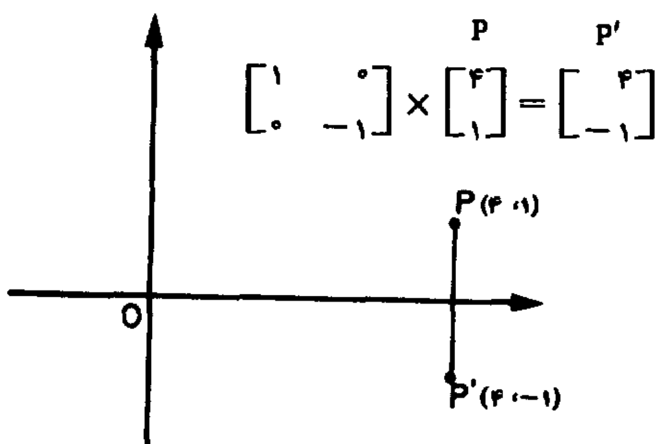
$$\begin{matrix} A' & B' & C' & D' \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} -۴ & ۰ & ۴ & ۰ \\ ۲ & ۴ & -۲ & -۴ \end{bmatrix}$$



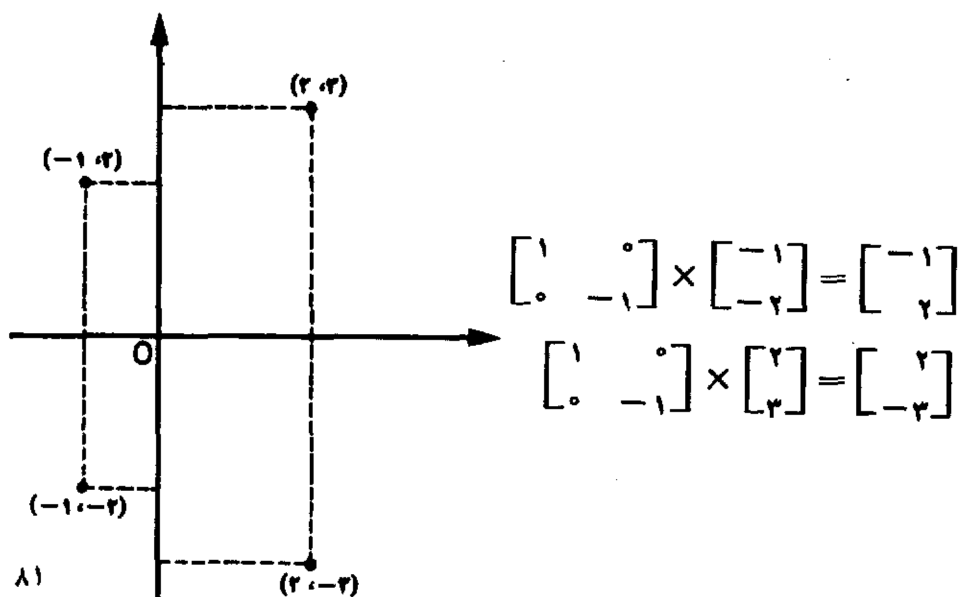
چهار ضلعی A'B'C'D' تبدیل مربع ABCD تحت ماتریس A است . بنابراین می‌توان گفت : هرماتریس ۲ × ۲ نظیر یك تبدیل در صفحه است.

ماتریس تقارن در محورx ها

نقطهٔ (۱ ، ۴) P را درنظرمی‌گیریم ، هرگاه ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ رادرماتریس‌نقطهٔ P به صورت زیر ضرب‌کنیم :

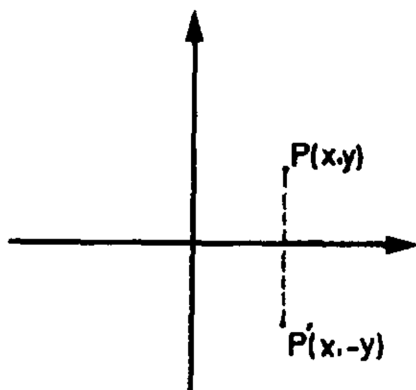


نقطهٔ جدید (۱ — ، ۴) بانقطهٔ مفروض دارای یك طول بوده ولی عرضهای‌آنهاقرینهٔ یکدیگر می‌باشند . چنین دونقطه‌ای را قرینهٔ یکدیگر نسبت به محور x ها می‌نامند . در زیر قرینه‌های نقاط (۲ — ، ۱ —) و (۳ ، ۲) به همین طریق به دست آمده است :



به طور کلی هرگاه ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ را در ماتریس نقطهٔ $P(x, y)$ به صورت زیر ضرب کنیم، قرینهٔ آن نقطه نسبت به محور x ها به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

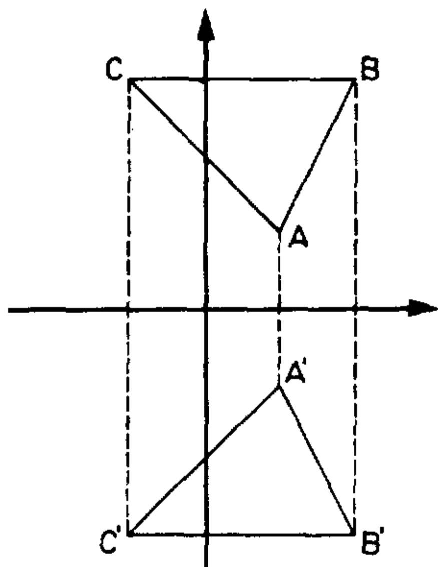


ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ به نام ماتریس تقارن در محور x ها خوانده می‌شود.

مثال ـ مثلث ABC باماتریس زیر مشخص شده است:

$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}$ (ستونها از چپ به راست به ترتیب متناظر با مختصات A،B وC می‌باشند) قرینهٔ این مثلث را نسبت به محور x ها به دست آورید.

طبق آنچه گفته شد، کافی است ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ را در ماتـریس فوق به صورت زیر ضرب کرد:



$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \times \overset{\quad A \quad B \quad C}{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۳ \end{bmatrix}} =$$

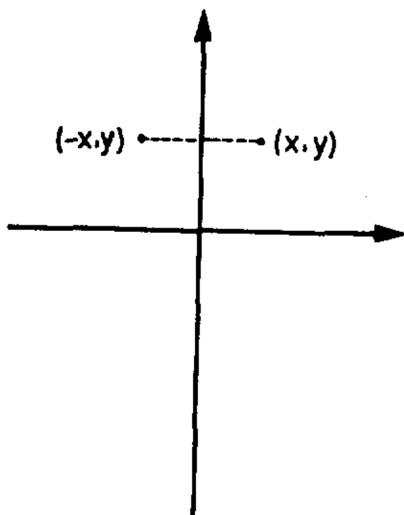
$$\overset{A' \quad B' \quad C'}{\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ -۱ & -۳ & -۳ \end{bmatrix}}$$

ماتریس حاصل، ماتریس قرینهٔ مثلث ABC نسبت به‌محور x هاست.

ماتریس تقارن در محور yها

نقطهٔ (x, y) را در صفحهٔ مختصات

درنظر گرفته، ازاین نقطه عمودی برمحور y ها فرودآورده،این‌عمود رابه اندازهٔقدرمطلق‌طول نقطه (شکل‌مقابل) امتداد می‌دهیم، نقطهٔ به دست‌آمده($-x$ ، y) بانقطهٔمفروض‌هم‌عرض بوده ولی‌طولهای‌آنها قرینهٔ یکدیگرمی‌باشند. دو نقطهٔ (x ، y) و ($-x$ ، y) را قرینهٔ یکدیگر نسبت به‌محور y ها می‌خوانند. برای پیدا کردن ماتریس تقارن در محور y ها باید ماتریس مربعی را پیدا کردکه اگر آن را در $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ضرب‌کنیم، نقطهٔ $\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$ به‌دست‌آید[1]



فرض‌کنید $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس‌مطلوب باشدبایدداشته باشیم :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

این تساوی برای تمام نقاط صفحه در نتیجه برای $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ نیز درست است :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

از ضرب ماتریسهای طرف چپ هریك از این تساویها حاصل می‌شود :

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

که طبق تعریف تساوی دوماتریس به دست می‌آید :

$a = -۱$ ؛ $b = ۰$ ؛ $c = ۰$ ؛ $d = ۱$

در نتیجه ماتریس تقارن در محور y ها برابر می‌شود با : $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

۱ـ گاهی اوقات به ماتریس نقطه خود نقطه اطلاق شده است .

تمرین ـ با استفاده از همین روش ماتریس تقارن در محور xها را به‌دست آورید .

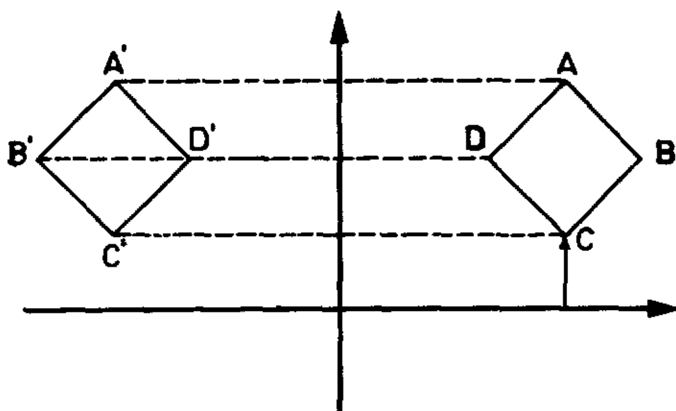
مثال ـ چهار ضلعی ABCD با ماتریس زیر مشخص شده است :

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

ماتریس قرینهٔ این چهار ضلعی را نسبت به محور yها به دست آورید .

کافی است ماتریس $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ رادرماتریس‌چهارضلعی فوق به صورت زیرضرب‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \overset{\begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix}}{\begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}} = \overset{\begin{matrix} A' & B' & C' & D' \end{matrix}}{\begin{bmatrix} -۳ & -۴ & -۳ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}}$$



ماتریس تقارن در مبدأ مختصات و خطوط y=x و y=−x

باروش متشابه‌آنچه درتعیین ماتریس تقارن نسبت به محورyها گفته شد به‌آسانی‌می‌توان ماتریس تقارن در مبدأ مختصات یا خطوط y=x و y=−x را بـه دست آورد . در زیـر ماتریسهای تقارن نسبت به مبدأ مختصات واین دوخط نوشته شده است :

ماتریس تقارن درمبدأ مختصات : $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$

ماتریس تقارن در خط y=x : $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$

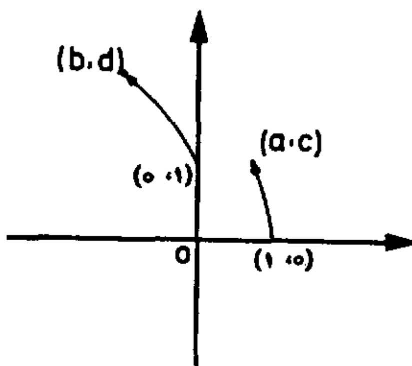
ماتریس تقارن در خط y=−x : $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$

به عنوان تمرین درستی مطالب بالا را تحقیق کنید .

ماتریس دوران

قبل‌ازپیداکردن ماتریسی‌که نمایش دورانی حول نقطهٔ O و به اندازهٔ α° درخلاف جهت حرکت عقربهٔ ساعت باشد ، توجه شمارا به نکات زیر جلب می‌کنیم :

هرگاه تبدیلهای‌نقاط $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ را تحت ماتریس‌مربع $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ به دست آوریم خواهیم داشت :

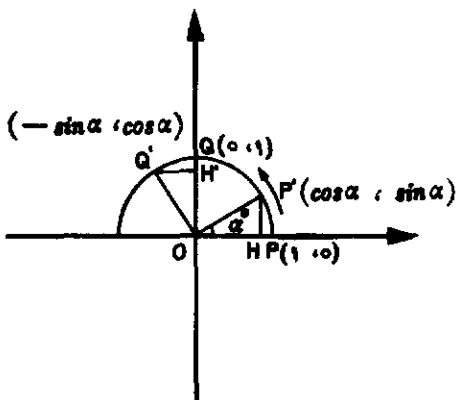


$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix} \quad (۲)$$

یعنی‌تبدیلهای‌نقاط $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ تحت ماتریس مربع $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ به‌ترتیب عبارتند از ستونهای اول و دوم این ماتریس . از این خاصیت برای به دست آوردن ماتریس دوران استفاده می‌شود .

در شکل زیر ، نقاط (۰ ، ۱) P و (۱ ، ۰) Q و تبدیلهای آنها پس از دوران α° حول مبدأ مختصات یعنی P' و Q' نشان داده شده است . در اینجا دیده می‌شود که نقطهٔ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ پس از دوران α° حول نقطهٔ O به نقطهٔ $\begin{bmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{bmatrix}$ تبدیل می‌شود .



(طبق تعریف سینوس وکسینوس درمثلث قائم‌الزاویهٔ OHP' که وتر آن واحد است.) ، که طبق تساوی (۱) ، ستون چپ ماتریس دوران را تشکیل می‌دهد . همچنین نقطهٔ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

پس‌ازدوران α° حول مبدأ مختصات به نقطهٔ $\begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix}$ تبدیل می‌شود (طبق تعریف سینوس و کسینوس در مثلث قائم‌الزاویه OQ'H با وتر واحد و در نظر گرفتن جهت) که طبق تساوی (۲) ستون راست ماتریس دوران را تشکیل می‌دهد. بنابراین ماتریس دوران حول نقطهٔ O و به اندازهٔ α° برابر است با :

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

اگر به‌جای α زاویهٔ ۳۰° قرار دهیم، ماتریس دوران حول مبدأ مختصات و به‌اندازهٔ ۳۰° به دست می‌آید :

$$\text{ماتریس‌دوران }۳۰^\circ\text{ حول مبدأ درجهت‌مثبت} = \begin{bmatrix} \cos ۳۰^\circ & -\sin ۳۰^\circ \\ \sin ۳۰^\circ & \cos ۳۰^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$$

تمرین

۱ـ در زیر چند ماتریس تقارن درمبدأ مختصات ، محورها وخطوط y=x و y = − x نوشته شده‌است . هرکدام از آنها را با اسم مشخص‌کنید . (مثلاً $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ ، ماتریس تقارن در خط y=x است) .

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} ؛ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} ؛ \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} ؛ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} ؛ \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲ـ هرکدام از تساویهای زیررا تفسیر کرده ، توضیح دهید کـه درهر تساوی قرینهٔ یك نقطه نسبت به چه خط یا محوری به دست آمده است :

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۳ \end{bmatrix} ؛ \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۶ \\ ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶ \\ -۶ \end{bmatrix} ؛$$

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۳ \end{bmatrix} ؛ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

۳- با استفاده از ماتریسها قرینهٔ هرکدام از نقاط زیر را نسبت به خط یامحور داده شده به دست‌آورید .

نقطه (۱ — ، ۶) نسبت به خط $x = -y$ ؛ نقطه (۲ — ، ۳) نسبت به محور yها ، نقطهٔ (۲ ، ۶ —) نسبت به خط $y = x$ ، نقطهٔ (۵ ، ۲ —) نسبت به مبدأ مختصات ؛ نقطه (a ، b) نسبت به محور xها .

۴- درزیر یك نقطه و تصویر آن داده شده است . ماتریس مربوط به هرتبدیل را پیداکرده باعمل ضرب درستی آنها را تحقیق کنید . تصویر نقطهٔ (۲ — ، ۶) عبارت است از (۶ ، ۲ —) ؛ تصویر نقطهٔ (۲ — ، ۶) عبارت است از (۶ — ، ۲) تصویر نقطهٔ (۱،۰) عبارت است از (۱ — ، ۰) ، تصویر نقطهٔ (a ، b) عبارت است از (a — ، b) ، تصویر نقطه (۵ — ، ۵) عبارت است از (۵ — ، ۵ —) .

۵- مطلوب است تعیین : الف ـ قرینهٔ مثلث $\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & -۳ \\ ۰ & ۳ & ۸ \end{bmatrix}$ نسبت به‌محور xها؛ ب ـ قرینه چهار ضلعی $\begin{bmatrix} ۵ & ۴ & ۳ & -۴ \\ ۰ & ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ نسبت به محور yها ؛ ج ـ قرینهٔ مثلث $\begin{bmatrix} -۸ & ۰ & -۸ \\ ۶ & ۰ & -۶ \end{bmatrix}$ نسبت به‌خط $y = x$.

۶- ماتریسهای دوران حول مبدأ مختصات را برای هریك از زوایای صفر درجه ، °۹۰ و °۱۸۰ بنویسید .

۷- تصویر نقطهٔ ($\frac{۱}{۲}$ ، ۳ —) را تحت هـریك از دورانهای °۴۵ ، °۶۰ و °۹۰ در حول مبدأ مختصات به دست آورید .

۸- اگر A مـاتریس دوران °۳۰ و B ماتریس دوران °۴۵ حـول مبدأ مختصات باشند ماتریس $A \times B$ نمایش چه دورانی خواهد بود .

۹- تصویر نقطهٔ (۱ — ، ۲) را تحت هریك از دورانهای °۷۵ ، °۱۲۰ ، °۲۴۰ ، °۳۱۵ حول مبدأ به دست آورید .

۱۰- تصویر نقطهٔ (۲ — ، ۵) را تحت هریك از دورانهای °۱۵۰ و °۲۱۰ حول مبدأ مختصات به دست آورید .

۱۱- تصویر هریك از چند ضلعیهای زیر را كه با ماتـریس نشان داده شده‌اند ، تحت دورانهای خواسته شده به دست آورید :

مثلث $\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۴ \\ ۲ & ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ تحت زاویهٔ °۲۷۰؛ چهار ضلعی $\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & ۸ & ۳ \\ ۲ & ۲ & -۶ & -۶ \end{bmatrix}$

تحت زاویهٔ 90° ؛ چهارضلعی $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ تحت زاویهٔ 30° ، مثلث $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 10 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ تحت زاویهٔ 180° — .

۱۲ـ نقطهٔ دلخواه (x ، y) از صفحه را حول مبدأ مختصات و به اندازهٔ α° دوران داده تصویرآن را (x' ، y') می‌نامیم ؛ با استفاده ازماتریس، x' و y' را برحسب x و y و نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ دوران ، محاسبه‌کنید .

۱۳ـ هرگاه به‌نقطهٔ P دو دوران متوالی وهم جهت حول نقطهٔ O ، یکی به‌اندازهٔ α° و دیگری به اندازهٔ β° دهیم ، نقطهٔ P در همان جهت و به اندازهٔ $\alpha^\circ+\beta^\circ$ حول O دوران خواهدکرد ، با استفاده ازاین‌مطلب به‌نقطهٔ (۰ ، ۱) دو دوران متوالی α° و β° حول مبدأ مختصات می‌دهیم باکمك ماتریسها نشان دهیدکه :

$$\cos(\alpha^\circ+\beta^\circ)=\cos\alpha^\circ\cos\beta^\circ-\sin\alpha^\circ\sin\beta^\circ$$
$$\sin(\alpha^\circ+\beta^\circ)=\sin\alpha^\circ\cos\beta^\circ+\cos\alpha^\circ\sin\beta^\circ$$

۱۴ـ ماتریس مربع OPQR برابر است با :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

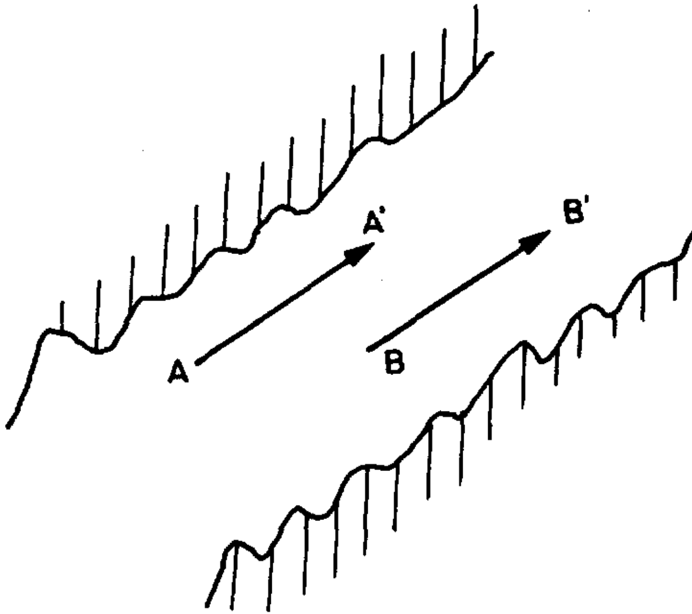
هریك از ماتریسهای زیر را به‌طور جداگانه درماتریس فوق ضرب‌کرده روی یك‌دستگاه مختصات شکل حاصل را درهرحالت باشکل اصلی مقایسه‌کنید .

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ؛ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} ؛ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ، \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} ؛ \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

فصل ۳

بردار

یك قایق پارویی ابتدا در نقطهٔ A بوده[1] پس از یك دقیقه به وسیلهٔ جریان‌آب رودخانه به نقطهٔ 'A برده می‌شود (شکل زیر) . قایق پارویی دیگری در لحظهٔ حرکت قایق اول در نقطهٔ B بوده پس از یك دقیقه به وسیلهٔ جریان آب به نقطهٔ 'B می‌رسد (جریان‌آب یکنواخت، مسیر مستقیم ، پاروها متوقف وقایقها متشابه فرض شده‌اند) .

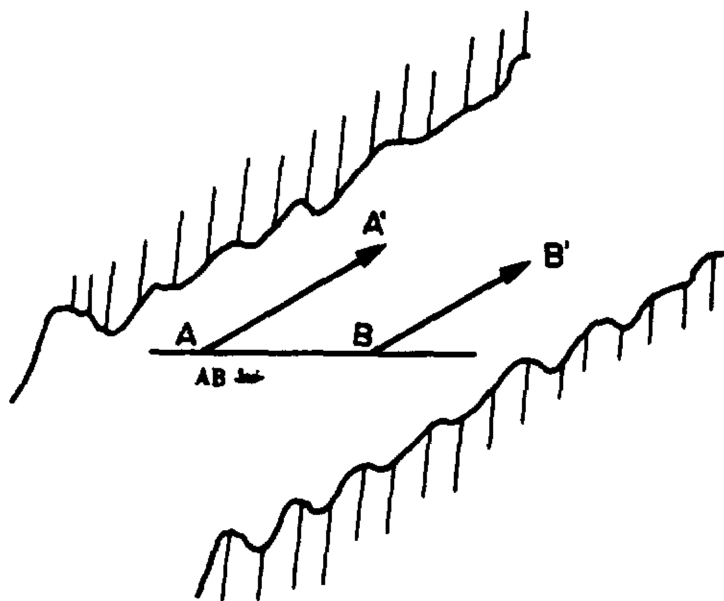


حرکت هر یك از قایقها یك پاره‌خط جهت‌دار را نشان می‌دهد . این پاره‌خط مستقیم بوده نقطهٔ شروع حرکت قایق مثلاً A را به نقطهٔ نهایی آن 'A وصل می‌کند . بنابراین جهت هرپاره‌خط نشان می‌دهد که قایق درکدام جهت تغییر مکان داده است . در مثال بالا شباهت بین دو پاره‌خط به طور روشنی نمایان است . این شباهت مربوط به این حقیقت است که وقتی قایق اول از نقطهٔ A به طرف 'A حرکت می‌کند ، قایق دوم نیز در همان لحظه ودر همان جهت شروع به حرکت‌کرده در لحظه‌ای‌که قایق اول به 'A می‌رسد قایق دوم نیز درنقطهٔ 'B خواهد بود . هریك از پاره‌خطهای جهت دار 'AA و 'BB ، که از این به بعد آنها را به

۱- درحقیقت یك نقطه از قایق در A است .

صورت: $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{BB'}$ نشان می‌دهیم ، برای مشخص نمودن حرکت مزبور کافی می‌باشد.

در مثال فوق، تحت شرایط ذکرشده اگر قایق از نقطهٔ A یا B یا هرنقطهٔ دیگر رودخانه حرکت‌کند ، واضح است که پاره‌خطهای جهت داری که نمایش حرکت این قایق در طول مدت یك دقیقه می‌باشند موازی، هم‌جهت ودارای‌طولهای مساوی‌بوده یعنی هم‌ارزخواهند بود. طبق آنچه‌گفته شد می‌توان گفت‌که : یك پاره خط جهت‌دار است هرگاه یك سر آن به عنوان ابتدا و سر دیگرش به عنوان انتها در نظرگرفته شود[1] . همچنین ، دو پاره‌خط 'AA و 'BB را در صفحه هم‌جهت‌گویند هرگاه خطوط 'AA و 'BB موازی بوده[2] و هردو در یك طرف خط AB واقع‌باشند . پاره‌خطهای موازی ، هم‌جهت و هم‌طول را هم‌ارز می‌خوانیم . در حالت‌کلی : دو پاره‌خط $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{BB'}$ هم‌ارز هستند اگر و فقط اگر چهارضلعی ABB'A' متوازی‌الاضلاع باشد .

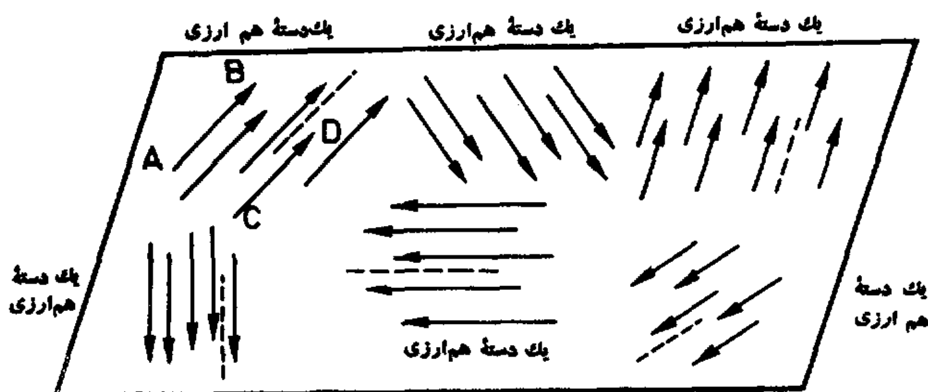


حال رابطهٔ « هم‌طول و هم‌جهت بودن » را در مجموعهٔ پاره‌خطهای جهت‌دار صفحهٔ π درنظربگیرید ، به سادگی می‌توان نشان‌دادکه این‌رابطه دارای‌خواص‌بازتابی، تقارن و ترایایی بوده وبنابراین‌یك رابطهٔ هم‌ارزی است. درنتیجه این رابطه مجموعهٔ تمام پاره‌خطهای جهت‌دار

۱ـ هرگاه A و B دو نقطه از صفحه باشند ، پاره‌خط جهت‌دار AB را بـه صـورت زوج مرتب (A ، B) نیز نشان می‌دهند .

۲ـ انطباق را نیز حالتی از توازی می‌گیریم .

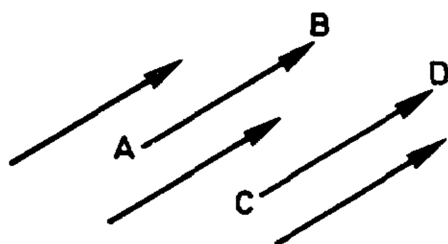
صفحهٔ π را به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌نماید . این دسته‌های هم‌ارزی به نام « بردارها » خوانده می‌شوند .



منظور از بردار $[\overrightarrow{AB}]$، دستهٔ هم‌ارزی پاره‌خطهای جهت‌داری‌است‌که با پاره‌خط $\overrightarrow{AB}$ هم‌ارز می‌باشند. برای سهولت بردار $[\overrightarrow{AB}]$ را با $\overrightarrow{AB}$ نمایش می‌دهیم.

A را ابتدا و B را انتهای بردار $\overrightarrow{AB}$ می‌خوانند . هرگاه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعلق به یك دستهٔ هم‌ارزی باشند می‌نویسند : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

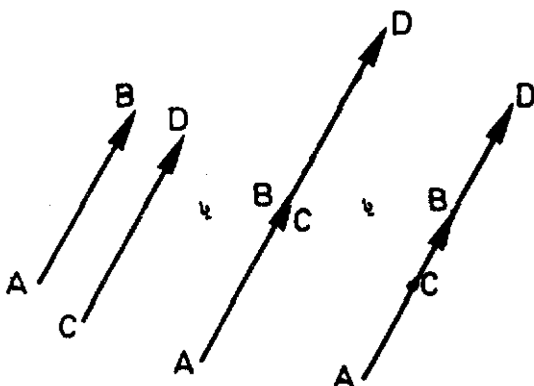
و می‌خوانند بردار $\overrightarrow{AB}$ مساوی بردار $\overrightarrow{CD}$ است .



یك دستهٔ هم ارزی

درشکل روبه‌رو مثالهای بیشتری برای روشن شدن مطلب ذکر شده است :

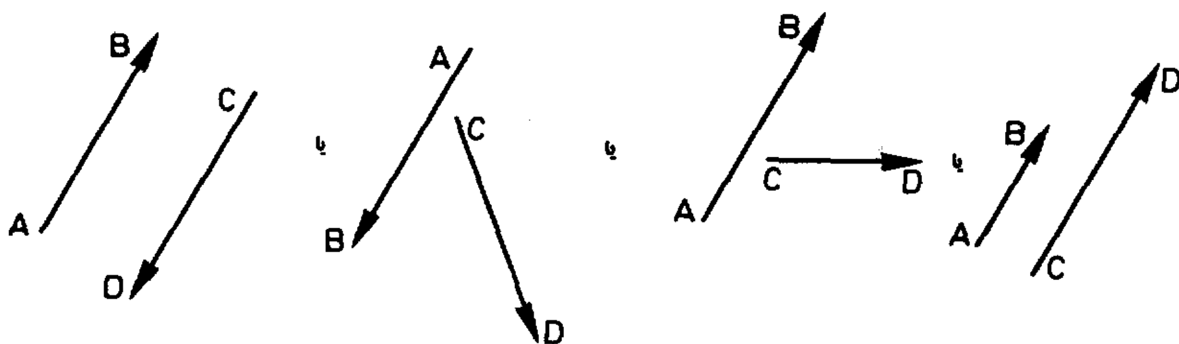
فرض کنید A ، B ، C و D نقاطی از صفحه باشند که برای آنها داریم : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ شکلهای روبه رو حالاتی که $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متعلق‌به یك دستهٔ هم‌ارزی می‌باشند را نشان می‌دهند :

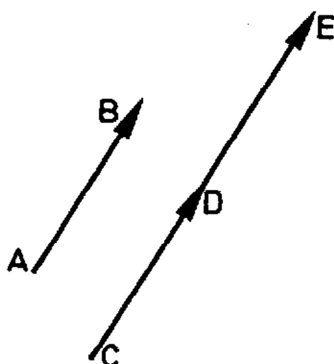


هرگاه بخواهیم نشان‌دهیم که AB و CD متعلق به‌یك دستهٔ هم ارزی نیستند می‌نویسیم :

$\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$

این مطلب در شکلهای زیر نشان داده شده است :



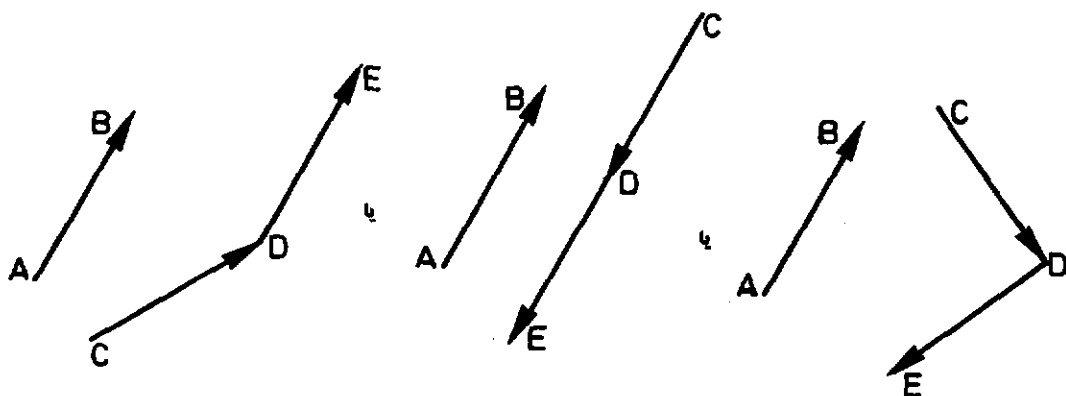


به طور متشابهی اگر A ، B ، C ، D و E
نقاط مفروضی از صفحه باشند طوری‌که :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DE}$

دراین صورت ممکن است آنها را به صورت
رو به رو نشان داد :

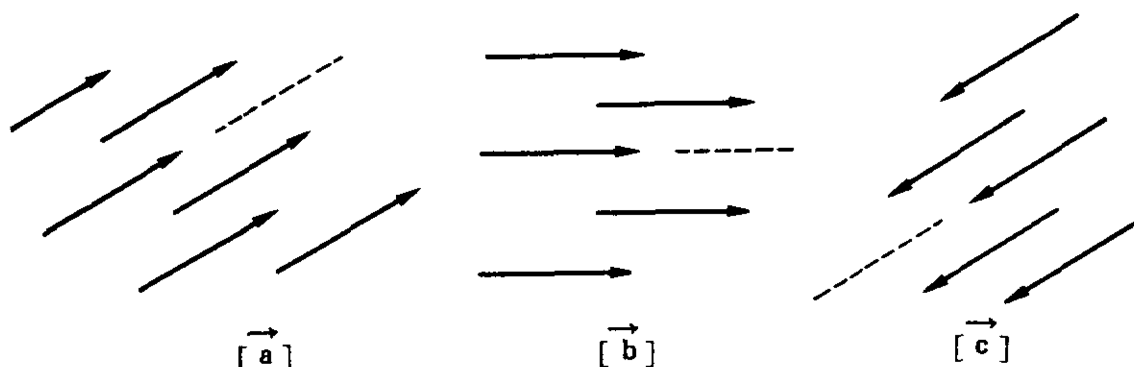
اماآنها را به‌صورتهای زیر نمی‌توان نشان داد :



نمایش بردار

طبق آنچه گفته شد ، رابطهٔ هم‌ارزی « هم‌طول وهم‌جهت بودن » ، در مجموعهٔ خطوط جهت‌دار صفحه ، این مجموعه را به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌نماید . ما کلمهٔ بردارها را برای این دسته‌های هم‌ارزی پاره‌خطها به‌کار برده هردستهٔ هم‌ارزی را با $[\vec{a}]$ ، $[\vec{b}]$ یا $[\vec{x}]$

نمایش می‌دهیم :

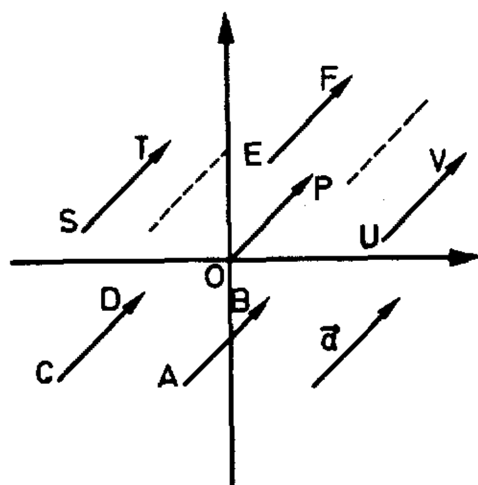


نمایندهٔ دستهٔ هم‌ارزی [$\vec{a}$] را با $\vec{a}$ نمایش داده وقتی می‌گوییم بردار $\vec{a}$ منظورمان همین دسته هم‌ارزی [$\vec{a}$] است. روشن‌است‌که دریك دستهٔ هم‌ارزی هرکدام ازپاره‌خطهای جهت‌دار ممکن است نمایندهٔ این دسته باشد.

ازآنچه گفته شد نتیجه می‌شود که :

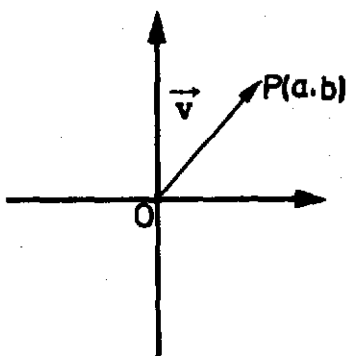
$$\vec{a} = \vec{b} \Longleftrightarrow [\vec{a}] = [\vec{b}]$$

بردار مکان ونمایش ماتریسی‌آن



شکل‌روبه‌رویك‌دسته بردارهای‌هم‌ارز را در صفحهٔ مختصات نشان می‌دهد :

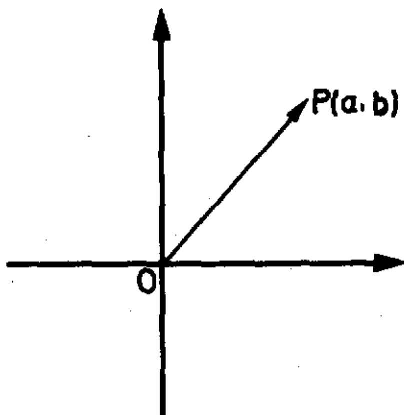
همان‌طور که گفته شد هرکدام از این پاره خطهای جهت دار ممکن است به عنوان نمایندهٔاین دستهٔ هم‌ارزی انتخاب شود. برای سهولت این نماینده را $\overrightarrow{OP}$ یعنی برداری که ابتدای‌آن مبدأ مختصات است می‌گیریم . با این ترتیب همواره می‌توان نقطهٔ ابتدای‌بردار دلخواه $\vec{v}$ را مبدأ مختصات فرض نموده ، در نتیجه آن را بامختصات نقطهٔ پایانش در صفحه مشخص‌کرد . ازطرفی می‌دانید که مختصات نقطهٔ P در صفحه با زوج مرتب (a ، b) که درآن a طول و b عرض نقطه است نمایش‌داده



می‌شود . باتوجه به مطالب گفته شده می‌توان گفت که :

هرنقطهٔ $P (a ، b)$ در صفحه یك و تنها یك بردار مثل $\overrightarrow{OP}$ و هربردار مثل $\overrightarrow{OP}$ فقط وفقط یك نقطه را در صفحه مشخص می‌سازد .

بردار $\overrightarrow{OP}$ به نام بردار مکان نقطهٔ P خوانده می‌شود .



در ماتریسها نیزدیدید که مختصات هر نقطه از صفحه مثل $P (a ، b)$ را می‌توان بایك ماتریس ۱ × ۲ به صورت زیر نشان داد[1] :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

این ماتریس را نمایش ستونی بردار $\overrightarrow{OP}$ خوانده و یا به طور خلاصه گفته می‌شود $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ یك بردار ستونی است و می‌نویسند :

$$\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

همچنین مختصات نقطهٔ P را می‌توان بایك ماتریس سطری به‌صورت $[a \;\; b]$ نمایش‌داد : در این صورت گفته می‌شود $\overrightarrow{OP}$ به طریق ماتریس سطری نشان داده شده یا به طور خلاصه $[a \;\; b]$ یك بردار سطری است . ومی‌نویسند : $\overrightarrow{OP} = [a \;\; b]$

a و b را مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{OP}$ می‌خوانند طبق آنچه گفته شد می‌توان گفت که :

هربردار را می‌توان بایك ماتریس سطری یاستونی نشان داد[1] .

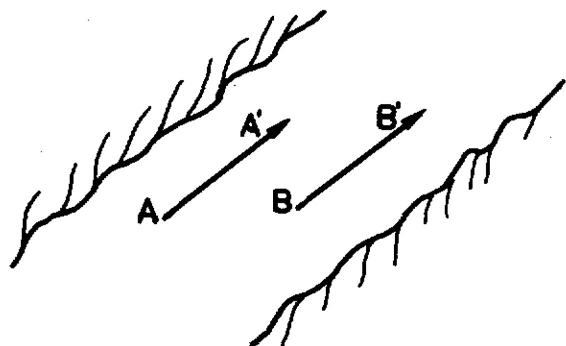
۱ـ در اینجا ما به بردارهای وابسته که ابتدای آنها آزاد نیست مثل بردارهایی که برای نمایش نیرو یا خط نیرو به‌کار می‌روند کار نداریم .

تساوی دوبردار ستونی یاسطری

دو بردار ستونی $\vec{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ مساویند اگر و فقط اگر $a_1=b_1$ و $a_2=b_2$. این مطلب در مورد دو بردار سطری $\vec{a}=[\,a_1 \quad a_2\,]$ و $\vec{b}=[\,b_1 \quad b_2\,]$ نیز درست است . پس : $\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow [\,(a_1=b_1)\wedge(a_2=b_2)\,]$

بردار و انتقال

مجدداً قایقهای پارویی روی رودخانه را درنظر بگیرید که دریك زمان معین درنقاط A و B بوده پس از یك دقیقه به وسیلهٔ جریان رودخانه (پاروها فعلاً متوقف است) به ترتیب به نقاط A' و B' برده شده‌اند .

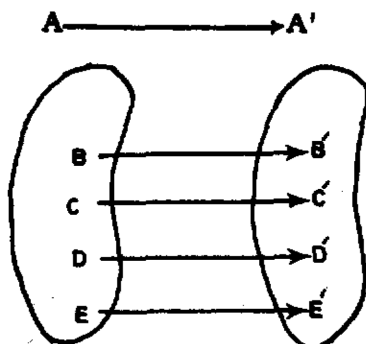


از نظر ریاضی جریان رودخانه رامی‌توان به‌منزلهٔ اثر یك تبدیل[1] درنظر گرفت که نقطهٔ A را به A' و B را به B' برده است .

این تبدیل به نام انتقال خوانده می‌شود. هریك از بردارهای $\overrightarrow{AA'}$ یا $\overrightarrow{BB'}$ را می‌توان نمایندهٔ این انتقال گرفت . بنابراین می‌توان گفت که :

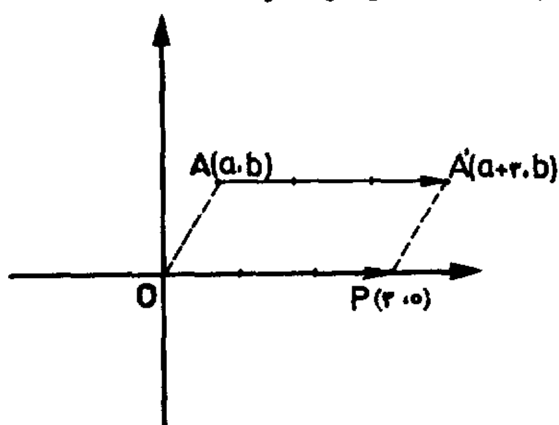
هربردار نظیر یك انتقال است و برعکس هرانتقال یك بردار را مشخص می‌سازد ویا به‌طور کلی‌تر: یك بردارنمایش انتقال تمام‌نقاط فضاست و $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{BB'}$، ... نمایشهای هم‌ارزاین‌انتقال می‌باشند .

در زیر بردار $\overrightarrow{AA'}$ با انتقال یك جسم صلب نشان داده شده است :



۱ـ یك تبدیل در صفحه عبارت است‌ازیك تابع که درمجموعه نقاط صفحه تعریف شده است.

مثال ۱ ـ انتقالی در نظر بگیریدکه هرنقطه از صفحه را ۳ واحد به موازات محور xها درجهت مثبت، تغییر مکان می‌دهد . بردار مکان این انتقال را مشخص نموده تعیین کنیـد این انتقال نقطهٔ $A(a \text{ ، } b)$ از صفحه را به چه نقطه‌ای منتقل خواهدکرد .



طبق آنچه گفته شد بـردار مکان این انتقال برابر است با :

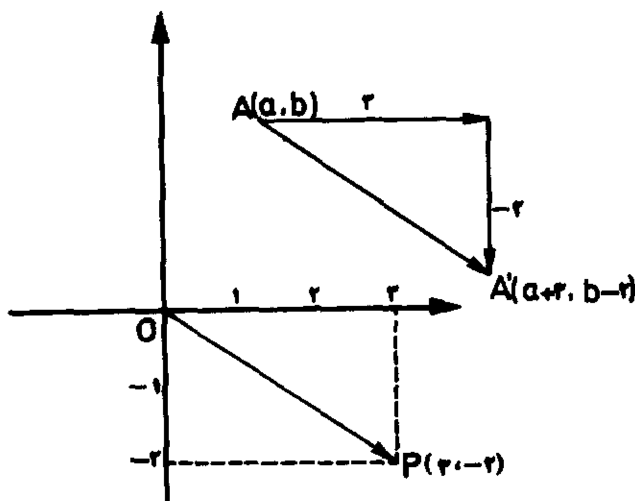
$$\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix}۳\\ ۰\end{bmatrix}$$

و چون بـردارهای $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{OP}$ یك انتقال را نشان می‌دهنـد پس مختصات A' برابر $(a+۳ \text{، } b)$ خواهد بود.به‌عبارت دیگر، انتقال مزبور نقطهٔ $A(a \text{ ، } b)$ را به‌نقطهٔ $A'(a+۳ \text{، } b)$ منتقل می‌نماید .

مثال ۲ ـ انتقالی درنظر بگیریدکه هرنقطه از صفحه را ۳ واحد به موازات محور x ها درجهت مثبت و ۲ واحد به موازات محور y ها درجهت منفی تغییر مکان دهد. بردارمکان این انتقال را مشخص نموده تعیین کنیداین‌انتقال نقطهٔ $A(a \text{ ، } b)$ رابه‌چه‌نقطه‌ای منتقل‌خواهدکرد.

طبق آنچه‌گفته شد بردار مکان این انتقال برابراست با :

$$\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix}۳\\ -۲\end{bmatrix}$$

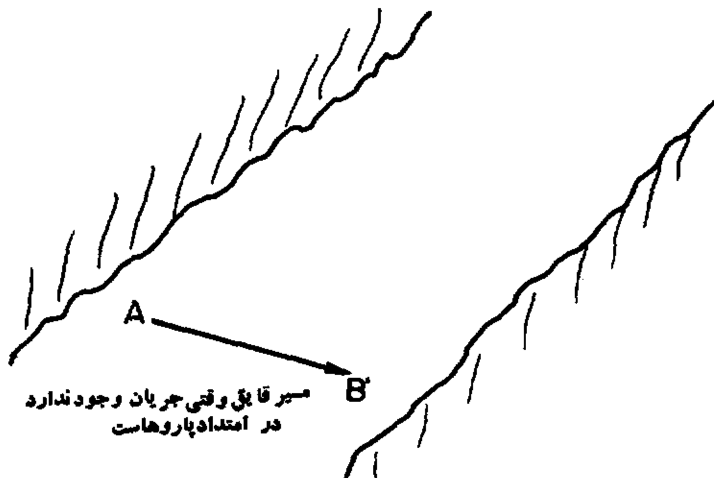


دو بردار $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{OP}$ متعلق به یك دستهٔ هـم‌ارزی بوده هـردو یك انتقال را نشان

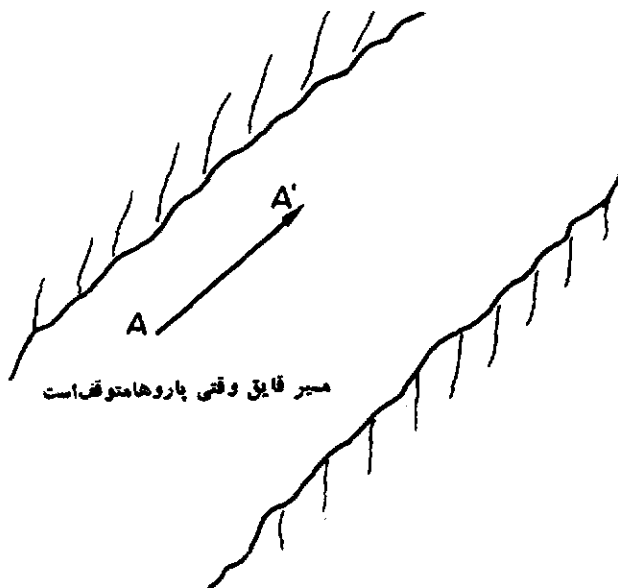
می‌دهند . در نتیجه مختصات A' برابر است با $(a+3، b-2)$. یعنی انتقال مزبور نقطهٔ $(a ، b)$ را به نقطهٔ $(a+3 ، b-2)$ منتقل می‌نماید .

جمع بردارها

قایق پارویی رامجدداً درنظرگرفته، فرض‌کنید موقتاً هیچ نوع جریانی در رودخانه‌وجود نداشته باشد . روشن است‌که قایق بدون حرکت خواهد ماند . هرگاه سرنشینان قایق به طور یکنواختی در جهت معین پارو بزنند مادام‌که جریان وجود نداشته باشد قایق درجهت پاروها حرکت‌کرده نقطهٔ A پس از یك دقیقه به نقطهٔ B' خواهد رسید .



حال فرض‌کنید پاروها متوقف بوده ورودخانه به طور یکنواختی جریان پیدا نماید . این جریان پس از یك دقیقه نقطهٔ A را به A' خواهد برد .



اگر رودخانه به طور یکنواختی جریان پیداکرده سرنشینان قایق نیز درجهت معین پارو بزنند آن‌گاه پس از یك دقیقه هرنقطه از قایق به وسیلهٔ جریان آب به یك طرف و به وسیلهٔ پاروها به طرف دیگر کشانیده می‌شود . بنابراین نقطهٔ A تحت اثر جریان رودخانه به‌طرف A' وتحت اثر پاروها به‌طرف B' کشانیده می‌شود ، ولی عملاً دیده می‌شودکه نقطهٔ A درامتداد

$\overrightarrow{AB}$ حرکت‌کرده طوری‌که چهار ضلعی AA'BB' یك متوازی‌الاضلاع می‌باشد .

حال اگر بردار نظیر پاره خطهای $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{B'B}$ را با $\vec{a}$ و بردار نظیر $\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{A'B}$ را با $\vec{b}$ نمایش دهیم خواهیم داشت :

$$\vec{a} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{B'B} \quad (۱)$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{A'B} \quad (۲)$$

مسیر قایق یعنی $\overrightarrow{AB}$ بردار دیگری مثل $\vec{c}$ را مشخص می‌کند که آن را مجموع $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌خوانیم :

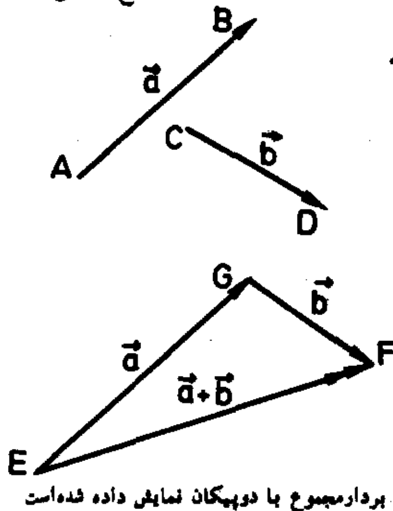
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad (۳)$$

باتوجه به تساویهای (۱) و (۲) ، تساوی (۳) را ممکن است به صورتهای زیرنوشت:

الف : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB}$ ، این تساوی به‌نام قانون متوازی‌الاضلاع برای جمع بردارها

خوانده می‌شود . زیرا $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{AB'}$ دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاعی است که $\overrightarrow{AB}$ (مجموع دوبردار) قطر آن می‌باشد .

ب : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{AB}$ یا $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AB}$ ، این تساویها به نام قانون مثلث برای جمع بردارها خوانده می‌شود . زیرا $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{A'B}$ یا $\overrightarrow{AB'}$ و $\overrightarrow{B'B}$ دو ضلع مثلثی هستند که ضلع سوم آن $\overrightarrow{AB}$ (مجموع دوبردار) می‌باشد .



بردارمجموع با دوپیکان نمایش داده شده‌است

درصورتی‌که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متقاطع نباشند :

در این صورت برای به دست آوردن $\vec{a}+\vec{b}$ نماینده‌های دیگری از $[\vec{a}]$ و $[\vec{b}]$ به شکل زیر انتخاب می‌کنیم :

ازنقطهٔ دلخواه صفحه به ترتیب دوپاره خط $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{GF}$ را هم‌ارز $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ (پاره خطهای متناظر با $\vec{a}$ و $\vec{b}$) رسم می‌کنیم تامثلث EGF به دست آید :

در اینجا طبق قانون مثلث برای جمع بردارها داریم :

$$\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{EF} \quad (۱)$$

ازطرفی : $\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}$

اگر در تساوی (۱) به جای EG و GF هم‌ارزهای آنهارا قراردهیم خواهیم داشت :

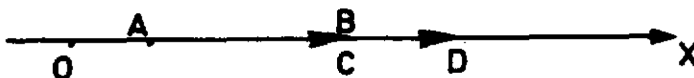
$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{EF}$$

و یا :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$$

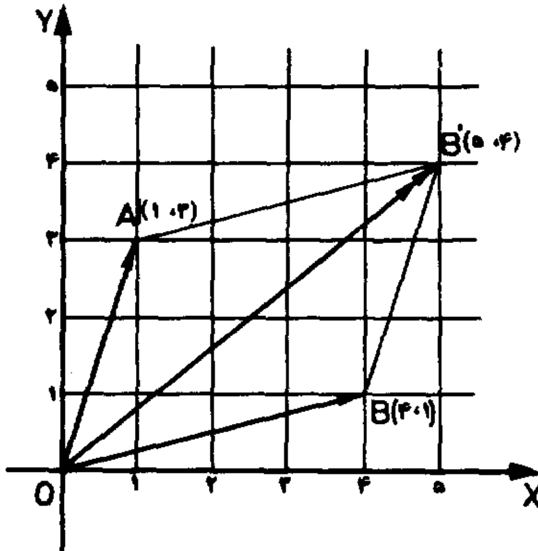
تساوی اخیر به سادگی نشان می‌دهدکه $\overrightarrow{EF}$ مجموع بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است .

هرگاه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ روی یك محور به صورت زیر باشند :



آن‌گاه $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ مساوی چه برداری خواهد بود ؟

جمع بردارهای سطری یا ستونی



دو بردار مکان $\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{OB}=\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}$ را نظیر دو انتقال گرفته فرض کنید این انتقالها به‌طور متوالی در نظر گرفته شوند (اول انتقال $\overrightarrow{OA}$ و به دنبال آن انتقال $\overrightarrow{OB}$) . از ترکیب این دو انتقال متوالی ، انتقالی به دست می‌آید که مستقیماً از O به B' بوده با $\overrightarrow{OB'}$ مشخص می‌شود . به عبارت دیگر :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{OB'} \quad (۱)$$

اما درشکل دیده می‌شود برای این‌که از مبدأ مختصات به نقطهٔ B' برسیم ابتدا باید ۵ واحد روی محور xها درجهت مثبت و ۴ واحد به موازات محور yها به‌طرف بالاحرکت‌کنیم . یعنی بردار مکان نقطهٔ B' برابر است با $\overrightarrow{OB'}=\begin{bmatrix}۵\\۴\end{bmatrix}$. اکنون با توجه به بردارهای ستونی $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OB'}$ ، تساوی (۱) به‌صورت زیرنوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۴\\۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵\\۴\end{bmatrix}$$

یعنی : در جمع بردارهای ستونی مؤلفه‌های متناظر آنها باهم جمع می‌شود . به عبارت دیگر ، هرگاه $\vec{a}=\begin{bmatrix}a_۱\\a_۲\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}b_۱\\b_۲\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه داریم :

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{bmatrix}a_۱\\a_۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_۱\\b_۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_۱+b_۱\\a_۲+b_۲\end{bmatrix}$$

این مطلب در مورد دو بردار سطری $\vec{a}=\begin{bmatrix}a_۱ & a_۲\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}b_۱ & b_۲\end{bmatrix}$ نیز

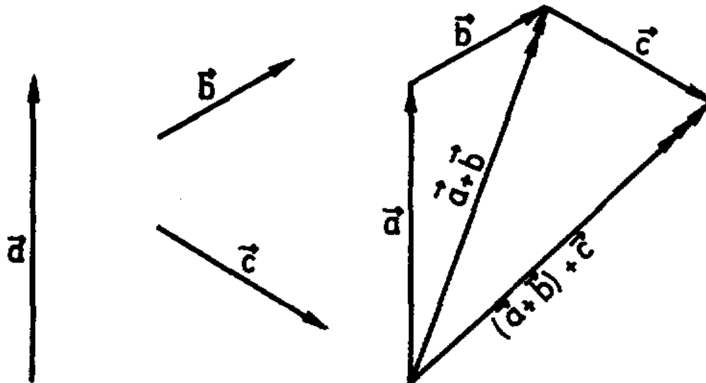
درست است :

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1 & b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+b_1 & a_2+b_2\end{bmatrix}$$

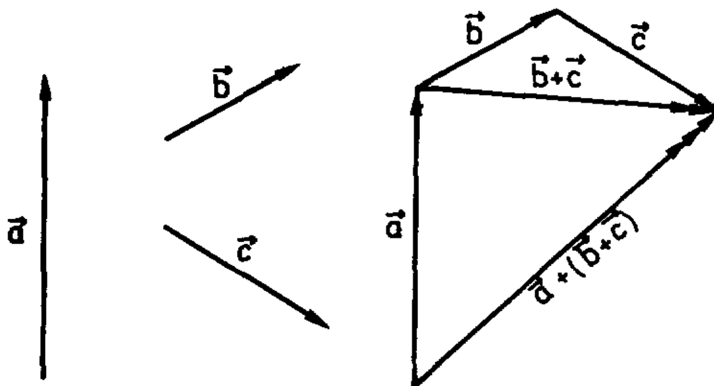
خواص جمع بردارها

الف ـ قانون مثلث برای جمع بردارها را ممکن است برای جمع چند بردار نیز تعمیم داد . در شکل زیر ، بردارهای $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داده شده‌اند . برای به دست آوردن مجموع این سه بردار ، ابتدا می‌توان با استفاده از قانون مثلث ، مجموع $\vec{a}+\vec{b}$ را به دست آورده سپس $(\vec{a}+\vec{b})$ را به‌منزلهٔ یك بردار گرفته‌طبق‌همان قانون مجموع‌آن را با $\vec{c}$ حساب‌کرد .

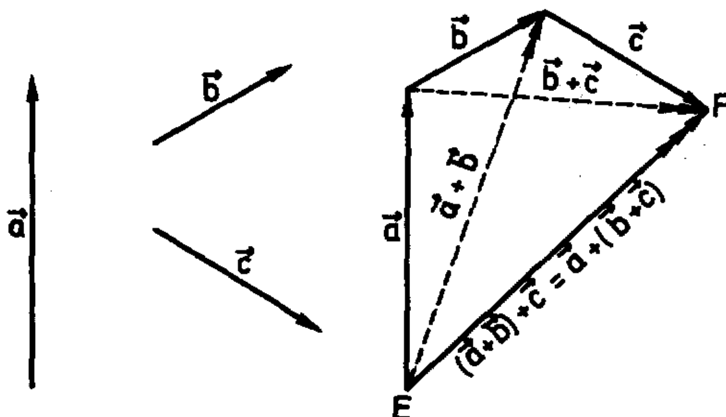
در شکل زیر $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ نشان داده شده است :



مجموع فوق را بدین ترتیب نیز می‌توان به دست‌آوردکه ابتدا $(\vec{b}+\vec{c})$ را حساب کرده ، سپس طبق قانون مثلث ، مجموع این بردار را با $\vec{a}$ به دست آورد . در شکل زیر $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ نشان داده شده است :



درشکل زیر هردو حالت باهم درنظر گرفته شده است :



درهرصورت مجموع سه بردار برابر $\overrightarrow{EF}$ بوده داریم :

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{EF}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

ویا :

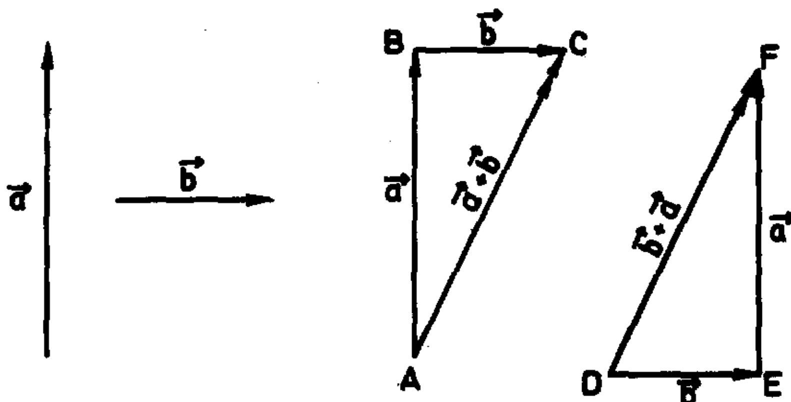
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

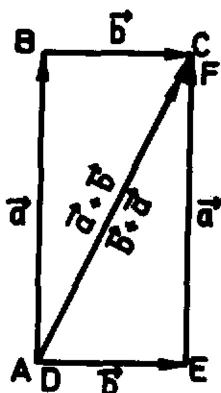
این تساوی که برای هرسه بردار $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در مجموعهٔ بردارها درست می‌باشد ، به‌نام خاصیت شرکت‌پذیری جمع بردارها خوانده می‌شود .

از حالا به بعدمی‌نویسیم :

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$$

ب ـ شکل زیر نشان می‌دهد که اگر ما ترتیب جمع یك زوج بردار را عوض‌کنیم ، در مجموع آنها تغییری حاصل نمی‌شود :





در حقیقت می‌توان مثلث DEF را لغزانده‌کنار مثلث ABC به‌صورت رو به‌رو قرارداد پس :

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DF}$ ویا $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

این تساوی‌که برای هردو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ درمجموعهٔ بردارها درست می‌باشد ، به نام خاصیت جابجایی جمع بردارها خوانده می‌شود .

طول یك بردار، بردار یکه، بردار صفر

پاره خط $\overline{AB}$ را درنظر گرفته بردار نظیرآن را با $\vec{a}$ نمایش می‌دهیم. بنابرتعریف منظور ازطول بردار $\vec{a}$ طول پاره خط $\overline{AB}$ است که‌آن را با $|\vec{a}|$ نمایش می‌دهیم. هرگاه $|\vec{a}|=1$ ، $\vec{a}$ را بردار یکه و اگر $|\vec{a}|=0$ آن را بردار صفر می‌نامند[1] . بردار صفر را معمولا با $\vec{O}$ نمایش داده‌آن را به عنوان دستهٔ هم‌ارزی شامل پاره خطهای $\overrightarrow{AA}$ ، $\overrightarrow{BB}$ ، $\overrightarrow{CC}$ ، $\overrightarrow{OO}$ ، . . . . یعنی پاره خطهایی که ابتدا و انتهای آنها یکی است درنظر می‌گیرند :

$$\overrightarrow{AA}=\vec{O}$$

چون ابتدا و انتهای بردار صفر ممکن است مبدأ مختصات گرفته شود ، پس :

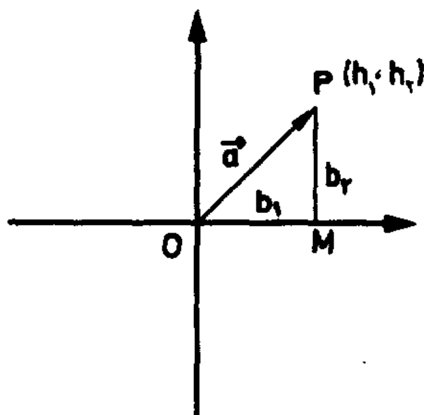
$$\vec{O}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

روشن است‌که هرگاه $\vec{a}$ بردار مفروضی باشد داریم :

$$\vec{a}+\vec{O}=\vec{O}+\vec{a}=\vec{a}$$

$\vec{O}$ عضوبی‌اثر جمع درمجموعهٔ بردارها نامیده می‌شود .

۱ــ گر چه امتداد وجهت یك‌بردار صفر تعریف نشده است، ولی ما هر تك نقطه مانند A را برداری تعریف می‌کنیم‌که طولش برابربا صفر وابتدا وانتهایش برA منطبق باشد .



طول بردار $\vec{a}$ ، هرگاه $\vec{a}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$، طبق قضیهٔ فیثاغورس از مثلث قائم‌الزاویهٔ OMP به دست می‌آید :

$$|\vec{a}|^2=b_1^2+b_2^2$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

بردار وارون ـ طبق آنچه راجع به بردار صفر گفته شد می‌توان نوشت[1] :

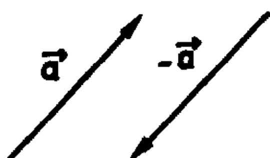


$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{AA}=\vec{O} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{A'A'}=\vec{O} \qquad (2)$$

دوبردار $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{A'A}$ که مجموع آنها برابرصفراست وارون‌یکدیگرنامیده می‌شوندو می‌نویسیم: $\overrightarrow{AA'}=-\overrightarrow{A'A}$

از نظرهندسی، وارون $\vec{a}$ برداری است که طول آن مساوی $\vec{a}$ بوده ولی جهت آن مخالف $\vec{a}$ می‌باشد .



روشن است که این دوبردار متعلق به یك دستهٔ هم‌ارزی نیستند. وارون $\vec{a}$ را با $-\vec{a}$ نمایش می‌دهیم.

طبق تساویهای (۱) و (۲) برای هربردار مفروض $\vec{a}$ داریم :

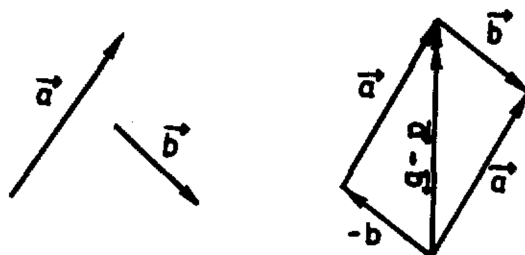
$$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{O}$$

یعنی ، درمجموعهٔ بردارها هر بردار دارای یك وارون است .

با استفاده ازبردار وارون ، بردار $\vec{a}-\vec{b}$ را به صورت زیرتعریف می‌کنیم :

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

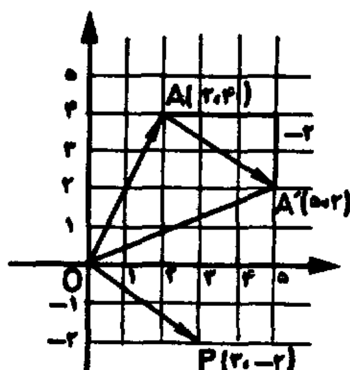
۱ـ در حقیقت نقطهٔ A یا 'A با دو انتقال به جای اول خود برگشته ومثل این است که A تحت هیچ انتقالی ($\vec{O}$) قرارنگرفته است .



مثال ۱ ـ انتقالی درنظر می‌گیریم که هرنقطه ازصفحه را ۳ واحد به موازات محور xها درجهت مثبت و ۲ واحد درامتداد محور yها و درجهت منفی تغییر مکان دهد . الف ـ بردار مکان نظیر این انتقال را نوشته ، تعیین کنید این انتقال نقطهٔ A(۲ ، ۴) را به چه نقطه‌ای منتقل می‌نماید . ب ـ هرگاه نقطهٔ A به A' منتقل شود ، بردار $\overrightarrow{AA'}$ را برحسب $\overrightarrow{OA'}$ و $\overrightarrow{OA}$ بنویسید .

حل : الف ـ طبق آنچه قبلاً گفته شد بردار مکان این انتقال برابر است با :

$$\overrightarrow{OP}=\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$$



این انتقال هرنقطه ازصفحه را ۳ واحد در جهت مثبت محور xها و ۲ واحد در جهت منفی محور yها تغییر مکان می‌دهد . در نتیجه نقطهٔ A (۲ ، ۴) را به نقطهٔ A'(۵ ، ۲) منتقل می‌نماید .

$$\overrightarrow{OA'}=\begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

ب ـ طبق قانون جمع بردارها داریم :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OA'}$$

اگر به طرفین این تساوی $-\overrightarrow{OA}$ را اضافه کنیم خواهیم داشت :

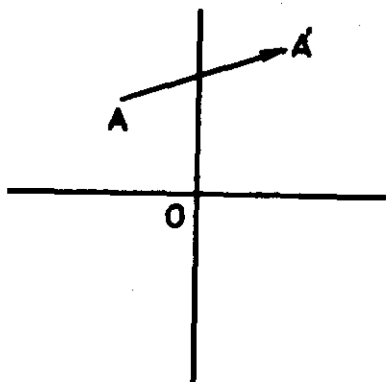
$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'})+(-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA'}+(-\overrightarrow{OA})$$

اما :

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'})+(-\overrightarrow{OA})=(-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'})=((-\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{AA'}$$

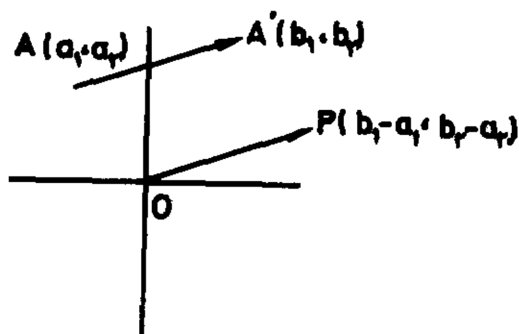
بنابراین طبق تعریف بردار وارون و تعریف تفاضل: $\vec{O}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OA}$

ویا طبق تعریف عضو بی‌اثر: $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OA}$



یعنی : هرگاه بخواهیم برداری مثل $\overrightarrow{AA'}$ را که ابتدا وانتهای‌آن برمبدأ مختصات منطبق نیست برحسب بردارمکان ابتدا وبردارمکان انتهای‌آن بنویسیم ، کافی است بردارمکان انتهای آن را منهای بردار مکان ابتدای‌آن‌کنیم :

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OA}$$



هرگاه داشته باشیم $A\,(a_1 \,،\, a_2)$ ، $A'\,(b_1 \,،\, b_2)$ و $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OP}$ ، آن گاه مختصات P برابر $(\,b_1-a_1 \,،\, b_2-a_2\,)$ خواهد بود .

هرگاه دونقطهٔ A و A' روی یك محور مثلاً محور xها باشند باز داریم :



$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OA}$$

اگربه طرفین این تساوی $\overrightarrow{OA}$ را اضافه‌کنیم خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{OA'}+(-\overrightarrow{OA}))+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}+((-\overrightarrow{OA})$$
$$\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA'}$$

ویا :

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OA'}$$

مثال ۲- بردارهای $\overrightarrow{OS}=\begin{bmatrix}-۱\\ ۵\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{OT}=\begin{bmatrix}۲\\ ۳\end{bmatrix}$ داده شده‌اند ، برای تعیین بردار ستونی $\overrightarrow{TS}$ بصورت زیر عمل می‌کنیم :

طبق مثال بالا داریم :

$$\overrightarrow{TS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OT}$$

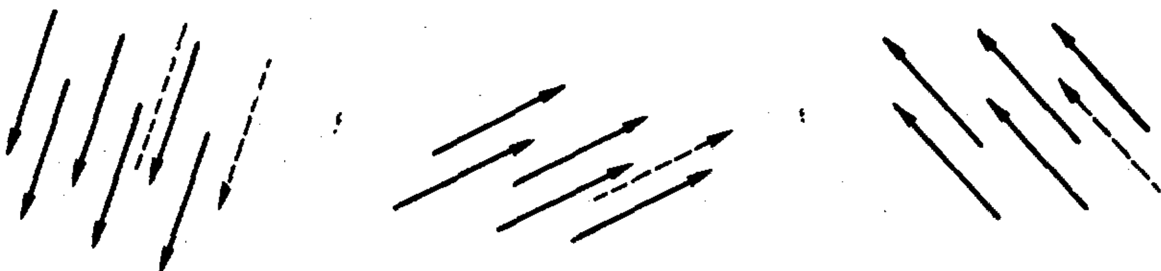
$$=\begin{bmatrix}-۱\\ ۵\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۲\\ ۳\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-۳\\ ۲\end{bmatrix}$$

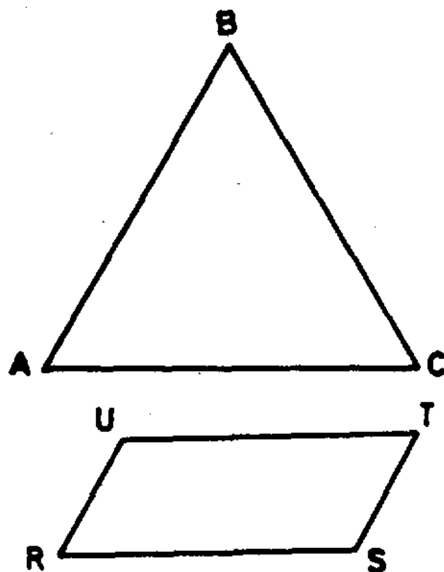
تمرین

۱ـ فرق بردار $\overrightarrow{AB}$ و پاره خط جهت‌دار $\overrightarrow{AB}$ چیست ؟

۲ـ در زیر چند دستهٔ هم‌ارزی ازبردارها داده شده است :



الف ـ هردسته را بایك نماینده مشخص نمایید. ب ـ مجموع این نماینده‌ها را بااستفاده از قانون متوازی‌الاضلاع به دست‌آورید.



۳ـ درشکل رو به‌رو هرپاره خط نمایندهٔ یك بردار است ، حاصلهای زیر را به دست آورید :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ؛ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$ ؛ $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{AC}$

$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA}$

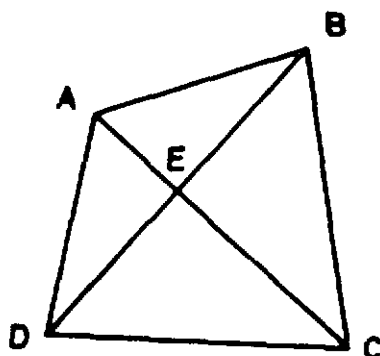
۴ـ متوازی‌الاضلاع RSTU داده شده‌است.

بردار $\overrightarrow{US}$ را برحسب بردارهای زیربه‌دست‌آورید:

الف : $\overrightarrow{TS}$ و $\overrightarrow{UT}$ ؛ ب : $\overrightarrow{SR}$ و $\overrightarrow{ST}$

۵- **بردارهای مساوی** هریک از بردارهای زیر را بنویسید (مثلاً $-\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{PQ}$)

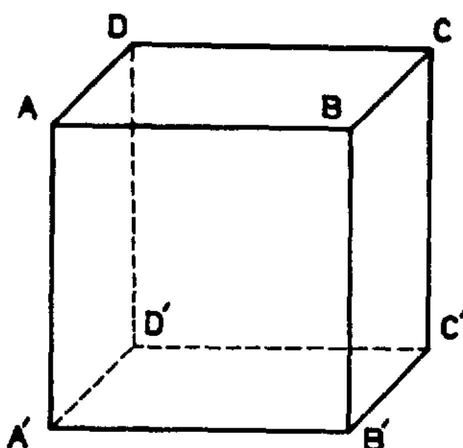
$-\overrightarrow{BD}$ ، $-\overrightarrow{FI}$ ؛ $\overrightarrow{HE}$ ؛ $-\overrightarrow{HB}$ ؛ $\overrightarrow{JB}$ ، $-\overrightarrow{AB}$ ؛ $\overrightarrow{DF}$



۶- در شکل روبه رو هرپاره خط نماینده یك برداراست؛ حاصل‌هرکدام ازجمعهای داده شده را به دست‌آورید .

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}$ ؛ $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$ ؛ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$ ؛ $\overrightarrow{DE}+(-\overrightarrow{BE})$

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}$ ؛ $\overrightarrow{AC}+(-\overrightarrow{BC})$ ؛ $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}+(-\overrightarrow{BD})$

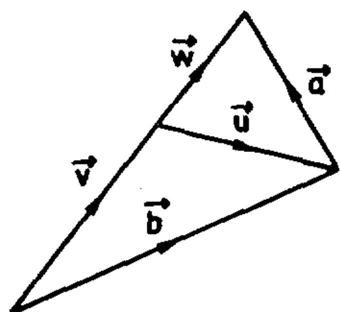


۷- شکل روبه‌رو یك مکعب است وهر پاره خط نمایندهٔ یك بردار می‌باشد. هرکدام‌از حاصلهای زیررا بنویسید،

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ ؛ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC'}$ ، $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{DC}$ ؛ $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$ ؛ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{B'D'}+\overrightarrow{CB}$ ؛ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'D}$

$\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CB}$ ؛ $\overrightarrow{A'C}-\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{CD'}$



۸- با استفاده ازشکل روبه‌رو مقدار $\vec{x}$ را در هریك از تساویهای زیـر به دست آورید :

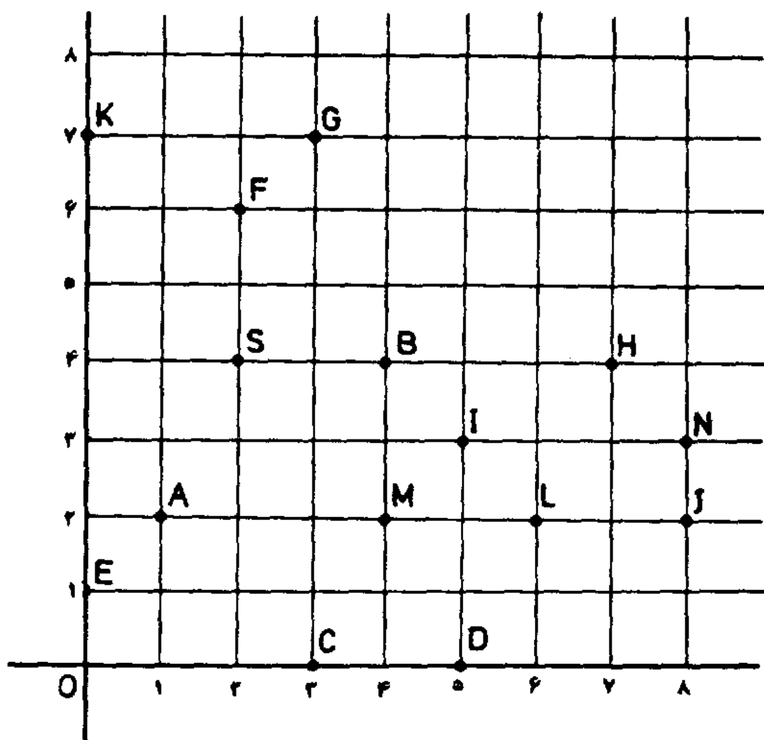
$\vec{x}+\vec{a}=\vec{w}$ ؛ $\vec{b}+\vec{x}=\vec{v}+\vec{u}+\vec{a}$ ؛

$\vec{v}=\vec{b}-\vec{x}$ ؛ $\vec{x}-\vec{w}=\vec{v}$

۹- حاصلهای زیررا به دست‌آورید :

$\begin{bmatrix} ۴ \\ -۱ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ؛ $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۷ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ؛ $\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۴ & ۱ \end{bmatrix}$

۱۰- بااستفاده از شکل زیر ، حاصلهای زیررابایک بردارستونی نمایش دهید :



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF}$ ؛ $\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GH}$ ؛ $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{HJ}$ ؛ $\overrightarrow{GJ}-\overrightarrow{CJ}$ ؛ $\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{CH}$

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AF})+(\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IJ})+(\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{DB})$

۱۱- بااستفاده ازشکل فوق، تعیین کنید اولاپاره خطهای جهت‌داری‌راکه با $\overline{OC}$ دریك دستهٔ هم‌ارزی قرارگرفته‌اند ، ثانیاً دستهٔ بردارهایی راکه $\overrightarrow{OA}$ نمایندهٔ آنهاست مشخص نمایید .

۱۲- بردارهای $\vec{a}=\begin{bmatrix}۱\\-۲\end{bmatrix}$ ، $\vec{b}=\begin{bmatrix}-۳\\۱\end{bmatrix}$ و $\vec{c}=\begin{bmatrix}۲\\۴\end{bmatrix}$ داده شده‌اند ؛ نشان دهید که :

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ ؛ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ ؛ $a+(-\vec{a})=\vec{O}$

۱۳- مطلوب است تعیین طول بردارهای زیر :

$\vec{a}=\begin{bmatrix}۴\\-۳\end{bmatrix}$ ، $\vec{b}=\begin{bmatrix}-۲\\-۳\end{bmatrix}$ ، $\vec{c}=\begin{bmatrix}\sqrt{۳}\\\sqrt{۵}\end{bmatrix}$ ، $\vec{d}=\begin{bmatrix}-۳\\۴\end{bmatrix}$

۱۴- بردارهای $\overrightarrow{OB}=\begin{bmatrix}-۳\\-۵\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{BC}=\begin{bmatrix}-۱\\۸\end{bmatrix}$ داده شده‌اند ؛ بردار مکان C را تعیین کنید .

۱۵- بردارهای $\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix}-۲\\۴\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}۱\\۳\end{bmatrix}$ داده شده‌اند ؛ بردار $\overrightarrow{OB}$ را به طریق ستونی نمایش دهید .

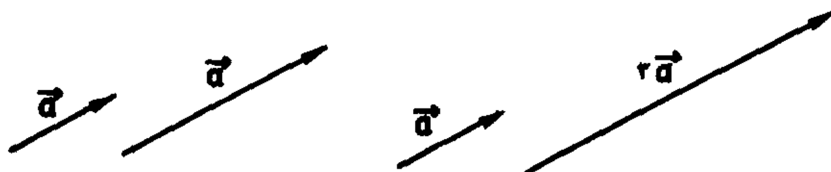
۱۶- هرگاه داشته باشیم ، A (۱ ، ۲) ، B (۴ ، ۳) و C (۶ ، ۱) ، مطلوب‌است تعیین مختصات نقطهٔ X درهریك از تساویهای زیر :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CX}$ ؛ $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{CB}$ ؛ $\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{CB}$ ؛ $\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{BC}$

ضرب یك عدد حقیقی در یك بردار

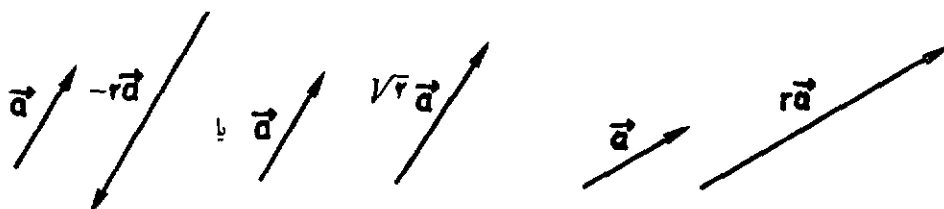
بردار $۲\vec{a}$ بنابرتعریف عبارت است از : $۲\vec{a}=\vec{a}+\vec{a}$

همچنین تعریف می‌کنیم : $۳\vec{a}=۲\vec{a}+\vec{a}$



اگر r یك عدد حقیقی باشد، $r\vec{a}$ برداری است‌که طول آن $|r|$ برابر طول $\vec{a}$ می‌باشد .

اگر $r>۰$ باشد $r\vec{a}$ و $\vec{a}$ هم‌جهتند و اگر $r<۰$ ، $r\vec{a}$ و $\vec{a}$ مختلف‌الجهت می‌باشند.



اگر $r=-۱$ داریم : $r\vec{a}=-۱\times\vec{a}$

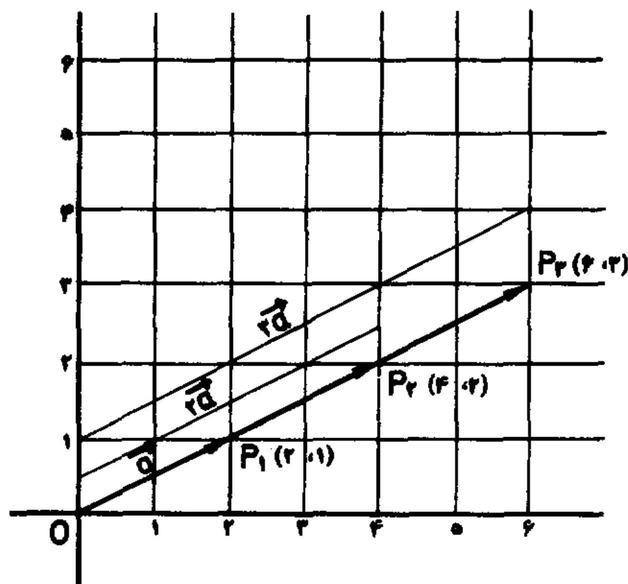
$-۱\times\vec{a}$ را برابر $-\vec{a}$ گرفته همانطورکه دیدید آن را وارون $\vec{a}$ می‌خوانند.

مثال ۱ـ بردار $\overrightarrow{OP_1} = \vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ را در نظر گرفته بردارهای $2\vec{a}$ و $3\vec{a}$ را بنویسید .

حل : از روی شکل دیده می‌شود که :

$$2\vec{a} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \overrightarrow{OP_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$3\vec{a} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \overrightarrow{OP_3} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$



در اینجا می بینیم که هرگاه عدد حقیقی r در بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ضرب شود ، آن عدد درهر مؤلفهٔ آن ضرب می‌شود :

$$r\vec{a} = r\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rb_1 \\ rb_2 \end{bmatrix}$$

اگر $r = -1$:

$$r\vec{a} = -1 \times \vec{a} = -1 \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{bmatrix} = -\vec{a}$$

مثال ۲ ـ هرگاه $\vec{a} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ دوبردار و s و t دو عدد حقیقی باشند نشان دهیدکه :

$$r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$$

حل : داریم

$$r(\vec{a} + \vec{b}) = r\left(\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}\right)$$

تعریف جمع بردار ستونی :
$$= r\left(\begin{bmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \end{bmatrix}\right)$$

ضرب یك عدد دریك بردار:
$$= \begin{bmatrix} r(b_1 + c_1) \\ r(b_2 + c_2) \end{bmatrix}$$

توزیع‌پذیری درضرب اعداد حقیقی : $= \begin{bmatrix} rb_1 + rc_1 \\ rb_2 + rc_2 \end{bmatrix}$

جمع بردار ستونی : $= \begin{bmatrix} rb_1 \\ rb_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} rc_1 \\ rc_2 \end{bmatrix}$

ضرب یك عدد دریك بردار : $= r\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

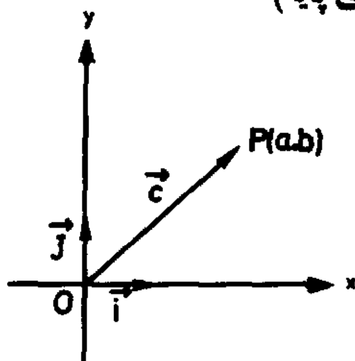
طبق فرض : $= r\vec{a} + r\vec{b}$

به همین ترتیب اگر r و t دو عدد حقیقی و $\vec{a}$ یك‌بردار باشد می‌توان نشان داد که :

$$(r+t)\vec{a} = r\vec{a} + t\vec{a}$$

$$rt(\vec{a}) = r(t\vec{a})$$

مؤلفهٔ یك بردار روی یك محور (بردارهای پایه)

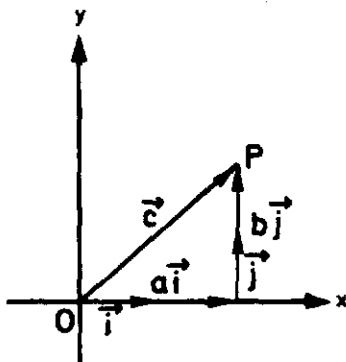


بردار $\vec{c}$ را در صفحهٔ مختصات در نظر گرفته آن را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\vec{OP} = \vec{c} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$= a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

در اینجا بردارهای ستونی $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ به ترتیب بردارهای یکه‌روی محورهای x و y بوده وبردارهای پایه نامیده می‌شوند.هرگاه قرار دهیم :



$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{i} \,;\, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{j}$$

در این صورت تساوی (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\vec{c} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

بردارهای $a\vec{i}$ و $b\vec{j}$ به ترتیب مؤلفه‌های بردار $\vec{c}$ روی محورهای x و y نامیده می‌شوند .

مثال ۱ ـ بردارهای $\vec{a}=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{bmatrix}۴\\-۵\end{bmatrix}$ داده شده‌اند، الف ـ هر کدام از این دو بردار را به صورت $a\vec{i}+b\vec{j}$ نمایش دهید. ب ـ بردار $(\vec{a}+\vec{b})$ را به صورت $a\vec{i}+b\vec{j}$ نمایش دهید. ج ـ بردار ۲a را به صورت $a\vec{i}+b\vec{j}$ بنویسید.

حل :

الف ـ $\vec{a}=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}+۳\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$

$=۲\vec{i}+۳\vec{j}$

$\vec{b}=\begin{bmatrix}۴\\-۵\end{bmatrix}=۴\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}-۵\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$

$=۴\vec{i}-۵\vec{j}$

ب ـ $\vec{a}+\vec{b}=(۲\vec{i}+۳\vec{j})+(۴\vec{i}-۵\vec{j})$

$=۶\vec{i}-۲\vec{j}$

ج ـ $۲\vec{a}=۲\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴\\۶\end{bmatrix}$

$=۴\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}+۶\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$

$=۴\vec{i}+۶\vec{j}$

یعنی اگر عـددی مثل r در بردار $۲\vec{i}+۳\vec{j}$ ضرب شود r در ضرایب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ یعنی ۲ و ۳ ضرب خواهد شد.

مثال ۲ ـ دو بردار $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}$ و $\vec{b}=۵\vec{i}-\vec{j}$ داده شده است؛ مجموع این دو بردار را به صورت یك بردار ستونی نمایش دهید.

حل :

$\vec{a}+\vec{b}=(۲\vec{i}+۳\vec{j})+(۵\vec{i}-\vec{j})$

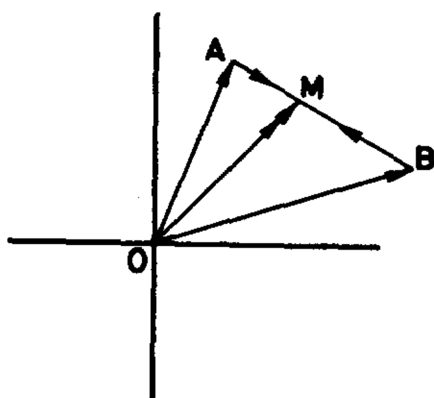
$=(۲\vec{i}+۵\vec{i})+(۳\vec{j}-\vec{j})$

$=۷\vec{i}+۲\vec{j}$

$=۷\begin{bmatrix}۱\\۰\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} ۷ \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

مثال ۳- درشکل زیرفرض می‌کنیم :



$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\lambda}{\mu}$ (λ و μ اعداد حقیقی می‌باشند)

نشان دهیدکه :

$$\mu\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = (\mu + \lambda)\,\overrightarrow{OM} \quad (۱)$$

حل :درمثلث OAM روبه‌رو داریم:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}$$

همچنین ازمثلث OMB به دست می‌آید :

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM}$$

طرفین این دو تساوی را به ترتیب در μ و λ که ضرب‌کنیم حاصل می‌شود :

$$\mu\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{AM} = \mu\overrightarrow{OM}$$

$$\lambda\overrightarrow{OB} + \lambda\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{OM}$$

این دو تساوی را نظیر به‌نظیر جمع می‌کنیم می‌شود :

$$\mu\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{BM} + \lambda\overrightarrow{OB} = (\lambda + \mu)\,\overrightarrow{OM}$$

و یا :

$$\mu\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} + (\mu\overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{BM}) = (\lambda + \mu)\,\overrightarrow{OM} \qquad (۱)$$

ولی طبق فرض داریم : $\mu\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$ و یا : $\mu\overrightarrow{AM} - \lambda\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

ویا : $\mu\overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0} \quad (۲)$

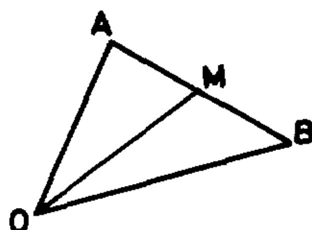
هرگاه در تساوی (۱) مقدار (۲) را منظور بداریم خواهیم داشت :

$$\mu\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = (\lambda + \mu)\,\overrightarrow{OM} \quad (۳)$$

و این همان مطلب خواسته شده است . تساوی (۳) را به صورت زیرنیزمی‌نویسند :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\mu\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{\mu + \lambda}$$

به خصوص اگر M وسط AB باشد ؛ خواهیم داشت :



$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{۲}$$

این تساوی بردار مکان نقطهٔ وسط یك بردار را برحسب بردار مکان ابتدا و انتهای آن به‌دست می‌دهد .

همچنین تساوی (۳) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\mu\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}-(\lambda+\mu)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{0}$$

مثال ۴ ـ نشان دهید هر گاه‌خطی اوساط دوضلع یك مثلث را به هم وصل نماید، موازی باضلع سوم و مساوی نصف آن است .

حل : در مثلث XAY داریم :

$$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{AY}=\overrightarrow{XY} \quad (۱)$$

طرفین‌این‌تساوی‌را درعدد ۲ ضرب‌می‌کنیم :

$$۲\overrightarrow{XA}+۲\overrightarrow{AY}=۲\overrightarrow{XY}$$

ولی طبق فرض داریم: $۲\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{BA}$ و $۲\overrightarrow{AY}=\overrightarrow{AC}$. پس (۱) به صورت زیرنوشته می‌شود :

$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=۲\overrightarrow{XY}$$

از طرفی در مثلث ABC داریم : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ از مقایسهٔ دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود که : $\overrightarrow{BC}=۲\overrightarrow{XY}$ که باتوجه به تعریف ضرب یك عدد حقیقی دریك بردار نتیجه می‌شود که $\overrightarrow{XY}$ موازی $\overrightarrow{BC}$ بوده و طول آن نصف $\overrightarrow{BC}$ است .

تمرین

۱ـ حاصل عبارتهای زیررا به دست آورید :

$$۴\begin{bmatrix}۵ & ۶\end{bmatrix} ، -۴\begin{bmatrix}۵ & ۶\end{bmatrix} ، -۱\begin{bmatrix}۵ & ۶\end{bmatrix} ، ۴\begin{bmatrix}۳ & ۱\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}-۱ & ۳\end{bmatrix}$$

۲- در تساویهای زیر r و s اعداد حقیقی هستند ، آنها را پیداکنید :

$$r\begin{bmatrix}۳ & -۱\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}۳ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۶\end{bmatrix} \text{ ؛ } r\begin{bmatrix}۳ & ۲\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۲\end{bmatrix}$$

۳- در تساویهای زیر a و b اعداد حقیقی هستند ؛ آنها را به دست آورید :

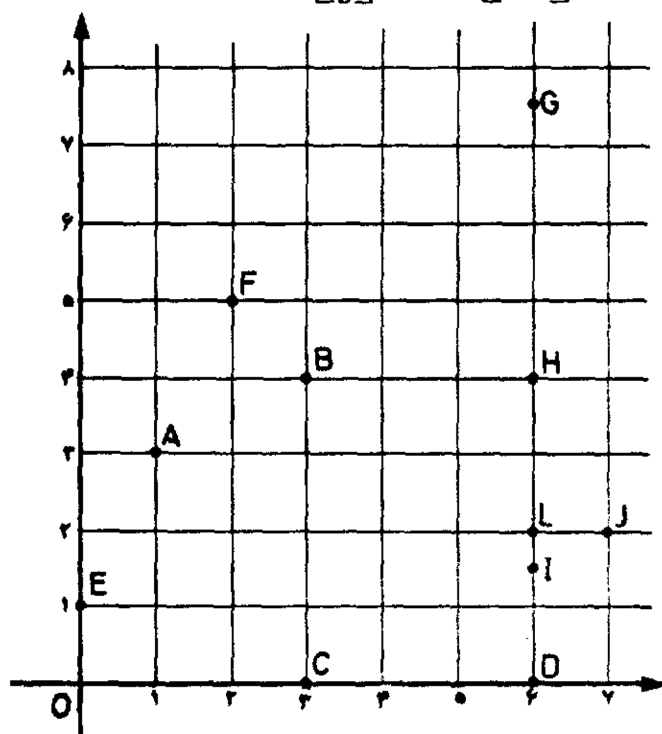
$$\begin{bmatrix}۳ & ۱\end{bmatrix}=a\vec{i}+b\vec{j} \text{ ؛ } \begin{bmatrix}۱ & -۳\end{bmatrix}=a\vec{i}+b\vec{j} \text{ ؛ } \vec{i}=a\begin{bmatrix}-۳ & ۱\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}۱ & -۳\end{bmatrix}$$

$$\vec{j}=a\begin{bmatrix}-۳ & ۱\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}۱ & -۳\end{bmatrix} \text{ ؛ } ۳\vec{i}-۲\vec{j}=a(۳\vec{i}+۴\vec{j})+b(۴\vec{i}+۳\vec{j})$$

۴- بردارهای $\vec{a}=\begin{bmatrix}-a \\ ۲b\end{bmatrix}$ ، $\vec{b}=\begin{bmatrix}۳a \\ b\end{bmatrix}$ و $\vec{c}=\begin{bmatrix}a \\ b\end{bmatrix}$ داده شده‌اند ؛ حاصلهای هریك از : $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ و $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ را به‌صورت $a\vec{i}+b\vec{j}$ نوشته آنها را باهم مقایسه کنید .

۵- بردار $۳\vec{i}+۵\vec{j}$ را به صورت ترکیب خطی دوبردار $۲\vec{i}+\vec{j}$ و $\vec{i}+۲\vec{j}$ بنویسید .

۶- با توجه به‌شکل مقابل حاصلهای زیر را به دست‌آورید :



الف - $\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$ ؛ ب - $\frac{۱}{۵}(۲\overrightarrow{BH}+۳\overrightarrow{BI})$ ؛ ج - $\frac{۱}{۱۱}(۱۰\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BC})$ ؛

د - $\frac{۱}{۱۳}(۶\overrightarrow{BG}+۷\overrightarrow{BD})$ ؛ ه - $\overrightarrow{OA}-۲\overrightarrow{AF}+۳\overrightarrow{FG}$ ؛ و - $\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DC})$

ز - $\frac{۱}{۳}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ ؛ ح - $\overrightarrow{OJ}-۴\overrightarrow{OC}$

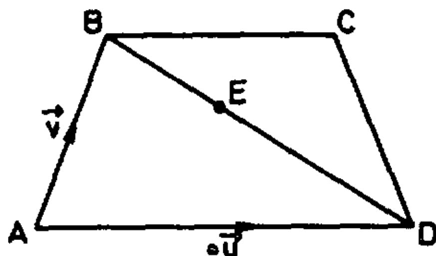
۷- در مسئلهٔ فوق نشان دهید که :

الف- عبارت «الف» از تمرین ۶ نمایش برداری مثل $\overrightarrow{OK}$ است که K وسط $\overrightarrow{AC}$ می‌باشد .

بـ عبارت «ب» ازتمرین۶ نمایش‌برداری مثل $\overrightarrow{BN}$ است‌که N پارهٔ خط HI را به نسبت $\frac{۳}{۲}$ تقسیم می‌کند :

ج‌ـ عبارت «ج» ازتمرین۶ نمایش برداری مثل $\overrightarrow{BM}$ است‌که M پاره‌خط FC را بـه نسبت $\frac{۱}{۱۰}$ تقسیم می‌کند .

دـ عبارت «د» ازتمرین۶ نمایش برداری مثل $\overrightarrow{BM}$ است‌که M پاره خط GD را به نسبت $\frac{۷}{۶}$ تقسیم می‌کند .



۸ـ درشکل‌روبه رو BC موازیAD و $\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AD}}=\frac{۳}{۵}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ به ترتیب نمایندهٔ بردارهای $\vec{v}$ و $5\vec{u}$ می‌باشند .

بردارهای زیر را برحسب این دو بردار پیدا کنید :

$\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AE}$ (E نقطه‌ای‌روی BD است به قسمی‌که $\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{ED}}=\frac{۳}{۵}$)

فصل ۴

گروه

اواریست گالوا ریاضی‌دان فرانسوی اولین‌کسی است‌که نظریه‌گروهها را در ریاضیات به‌کار برد. وی درسن ۱۹ سالگی مطالعه منظم گروههارا شروع‌کرد و ازاین راه به‌حل‌مسائلی مربوط به معادلات موفق گردیدکه مورد بحث ریاضی‌دانان وقت بود.

نگره‌گروهها یکی از زیباترین شاخه‌هـای ریاضیات است و دارای‌کاربردهـای زیادی در رشته‌های گوناگون از جمله فیزیك ، شیمی و مکانیك کوانتم میباشد.

ما این فصل را با تعریف یك «عمل» روی یك مجموعه شروع میکنیم.

تعریف ـ فرض‌کنیم A یك مجموعه ناتهی باشد. یك عمل دوتائـی و یـا بطور ساده یك عمل روی مجموعه A عبارت از تابعی است روی $A \times A$ در A. بعبارت دیگـر یك عمل روی مجموعه A عبارت از قانونی است‌که بهر زوج مرتب از عناصر A ، یك عنصر منحصربفرد از A را نسبت دهد.

یك عمل روی مجموعه A را بـا نمادهائـی مانند * ، o ، □ و غیره نشان میدهند . اگر * یك عمل روی مجموعه A باشد، عنصری از A که به‌زوج مرتب $(a،b) \in A \times A$ نسبت داده میشود با $a*b$ نشان داده میشود.

مثال ۱ ـ جمع معمولـی « + » یـك عمل روی مجموعـه اعـداد درست است. همچنین ضرب معمولی « × » یك عمل روی مجموعه اعداد حقیقی است.

مثال ۲ ـ برای هر زوج مرتب (m,n) از اعداد طبیعی تعریف میکنیم:

$$m*n = m^{2} + n$$

دراینصورت «*» یك عمل روی مجموعه اعداد طبیعی است.

تعریف ـ گوئیم عمل «*» روی مجموعه A دارای‌خاصیت جابجائی است، هرگاه برای هر $a،b \in A$ ، داشته باشیم:

$$a*b = b*a$$

مثال ۱ ـ عمل « + » روی مجموعـه اعداد حقیقی دارای خاصیت جابجائی است. زیـرا برای هر $a,b \in R$ ، داریم:

$$a + b = b + a$$

مثال ۲ ـ عمل «$\square$» را روی مجموعه اعداد درست بصورت زیر تعریف میکنیم:

$m \square n = m^2 + n$

بسادگی میتوان دیدکه «$\square$» روی Z دارای خاصیت جابجائی نیست زیرا برای مثال

$3 \square 2 = 3^2 + 2 = 11$

و حال آنکه

$2 \square 3 = 2^2 + 3 = 7$

تعریف ـ گوئیم عمل «$*$» روی مجموعـه A دارای خاصیت شرکت پذیری است، هرگـاه برای هر $a, b, c \in A$ داشته باشیم:

$(a*b)*c = a*(b*c)$

مثال ۱ ـ عمل « + » روی مجموعه اعداد حقیقی دارای خاصیت شرکت‌پذیری، زیرا

$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad \forall a, b, c \in R$

مثال ۲ ـ عمل «o» را روی مجموعه اعداد طبیعی بصورت زیر تعریف میکنیم:

$mon = m \qquad \forall m, n \in N$

بسادگی میتوان دیدکه o روی N دارای خاصیت شرکت‌پذیری است زیرا اگر m, n, p اعداد طبیعی باشند، خواهیم داشت:

$(mon)op = mop = m$

و:

$mo(nop) = mon = m$

تعریف ـ فرض‌کنیم G یك مجموعه ناتهـی و «$*$» یك عمل روی G باشد. G را همـراه با عمل «$*$» یك گروه گوئیم، هرگاه خواص زیر برقرار باشد.

الف ـ عمل «$*$» روی G دارای خاصیت شرکت‌پذیری باشد .

ب ـ در G عضوی مانند e وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $g \in G$ ، داشته باشیم:

$g*e = e*g = g$

e را عضو بی‌اثر عمل «$*$» در G مینامیم.

پـ برای هر $a \in G$ ، یك عنصر $a' \in G$ وجود داشته باشد بطوریکه

$a'*a = a*a' = e$

a' را عضو وارون a نسبت به عمل «$*$» مینامیم.

مجموعه G همراه با عمل «$*$» را گاهی با نماد $(G, *)$ نشان میدهند.

تاکنون مثالهائی از یك‌گروه دیده‌اید بدون آنکه کلمه‌گروه ذکر شده باشد. به مثالهای

زیر توجه کنید.

مثال ۱ ـ مجموعه اعداد درست Z همراه با عمل جمع «$+$» یک گروه است.

الف ـ عمل «$+$» روی Z دارای خاصیت شرکت پذیری است زیرا:

$$(m+n)+p=m+(n+p) \qquad \forall m,n,p\in Z$$

$$((۲+۳)+۵=۲+(۳+۵)$$ (مثلا

ب ـ با عدد صفر آشنا هستید و می‌دانیدکه برای هر $m\in Z$ میتوان نوشت:

$$m+۰=۰+m=m$$

پ ـ همچنین میدانیدکه اگر m یک عدد درست باشد،

$$m+(-m)=(-m)+m=۰$$

مثال ۲ ـ مجموعه اعداد گویا و مثبت یعنی:

$$Q^+=\left\{\frac{p}{q}:p,q\in N\right\}$$

همراه با عمل ضرب «$\times$» یک گروه است.

الف ـ عمل «$\times$» روی Q^+ دارای خاصیت شرکت‌پذیری است زیرا:

$$(a\times b)\times c=a(b\times c) \qquad \forall a,b,c\in Q^+$$

$$\left((\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴})\times\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۲}\times(\frac{۳}{۴}\times\frac{۲}{۵})\right)$$ (مثلاً

ب ـ با عدد یک «۱» آشنا هستید و می‌دانیدکه برای هرعدد گویا و مثبت $\frac{p}{q}$ میتوان‌نوشت $(p,q\in N)$.

$$۱\times\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\times۱=\frac{p}{q}$$

پ ـ همچنین می‌دانید که اگر $\frac{p}{q}\in Q^+$، پس $\frac{q}{p}\in Q^+$ و علاوه براین

$$\frac{p}{q}\times\frac{q}{p}=\frac{q}{p}\times\frac{p}{q}=۱$$

مثال ۳ ـ مجموعه ماتریسهای ۲ × ۲ همراه با عمل جمع ماتریسها «$+$» یک گروه است.

الف ـ همانطوریکه درفصل ماتریسها دیدید عمل «$+$» روی مجموعه ماتریسهای ۲ × ۲ دارای خاصیت شرکت‌پذیری است یعنی اینکه اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}e&f\\g&h\end{bmatrix}$ و

$C=\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$ سه ماتریس ۲ × ۲ باشند، خواهیم داشت:

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

ب ـ همانطوریکه در فصل ماتریسها دیدید اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یك ماتریس۲ × ۲ باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

یعنی اینکه $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ عنصر بی‌اثر عمل جمع در مجموعه ماتریسهای ۲ × ۲ است.

پ ـ اگر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یك ماتریس ۲ × ۲ باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

مثال ۴ ـ مجموعه اعداد طبیعی

$$N=\{۱, ۲, ۳, ۴, ...\}$$

همراه باعمل جمع یك گروه نیست، زیرا $(N, +)$ دارای خاصیت (ب) ازتعریف یك گروه‌نیست.

مثال ۵ ـ مجموعه $I=\{۰, ۱, ۲, ۳, ...\}$ همراه باعمل‌جمع یك گروه نیست‌زیراخاصیت (پ) از تعریف یك‌گروه در اینجا برقرار نیست . برای مثال عنصر ۳ ازI دارای وارون نیست.

مثال ۶ـ مجموعه اعداددرست Z همراه باعمل تفریق «ـ» یك‌گروه‌نیست، زیراخاصیت (الف) از تعریف یك گروه دراینجا برقرار نیست. برای مثال

$$۱۵-(۴-۱۲)\neq(۱۵-۴)-۱۲$$

مثال ۷ ـ مجموعه اعداد حقیقی R همراه با عمل‌ضرب یك گروه نیست، زیرا عنصرصفر دارای وارون نمیباشد.

تعریف ـ اگر $(G, *)$ یك گروه و $*$ دارای خاصیت جابجائی باشد، $(G, *)$ یك گروه جابجائی (و یا یك‌گروه ابلی) نامیده میشود.

برای مثال $(R, +)$ یك گروه جابجائی است.

بعنوان تمرین تحقیق کنید کدامیك از مثالهای قبل یك گروه جابجائی است.

خواص مقدماتی گروه‌ها

میدانیم که درهرگروه$(G,*)$ یک‌عنصر بی‌اثروجود دارد و هرعنصر g از G دارای عنصر وارون است. قضیه‌های زیر نشان میدهند که عنصر بی‌اثر وعنصر وارون هر عنصر دریک‌گروه منحصر بفرد میباشند.

قضیه ۱ ـ در هرگروه $(G,*)$، عنصربی‌اثر منحصربفرد است (یعنی اینکه هرگروه تنها دارای یک عنصر بی‌اثر است.)

اثباتـ اگر e_1 و e_2 عنصرهای بی‌اثر درگروه $(G,*)$ باشند، خواهیم داشت:

$$(1) \qquad e_1*g=g*e_1=g \qquad \forall g\in G$$

$$(2) \qquad e_2*g=g*e_2=g \qquad \forall g\in G$$

بنابر (۱) داریم:

$$e_1*e_2=e_2$$

و بنابر (۲) داریم:

$$e_1*e_2=e_1$$

ازاین دو تساوی نتیجه میشود که $e_1=e_2$ ، و بنابراین قضیه ثابت است.

قضیه ۲ ـ در هرگروه $(G,*)$ هر عنصر g از G تنها دارای یک‌وارون است(یعنی‌اینکه عنصر وارون هرعنصر از G منحصر بفرد است).

اثبات ـ فرض‌کنیم e عنصربی‌اثر گروه $(G,*)$ بوده و g متعلق‌به G باشد . اگر g' و g'' عنصرهای وارون g باشند، خواهیم داشت:

$$g'*g=g*g'=e \quad \text{و} \quad g''*g=g*g''=e$$

بنابراین :

$$g'=e*g'=(g''*g)*g'=g''*(g*g')=g''*e=g''$$

یعنی اینکه عنصر وارون هرعنصر از G منحصر بفرد است.

تمرینات:

تمرین۱ ـ آیا جمع و یا ضرب معمولی یک عمل روی هریک از مجموعه‌های زیر است؟

الف ـ $A=\{۱, ۲, ۳, ۴\}$

ب ـ $B=\{۱, ۳, ۵, ۷,...\}$

پ ـ $C=\{۲, ۴, ۶,...\}$

تمرین ۲ ـ اگر m, n اعداد طبیعی باشند، تعریف میکنیم:

الف ـ $m * n = m + n + mn$

ب ـ $m o n = m^۲ + n^۲$

پ ـ $m \square n = m + ۲n$

i ـ تحقیق کنیدکه هریك از «□» ، «o» و «*» یك عمل روی N میباشد.

ii ـ کدامیك ازاین عمل‌ها روی N دارای خاصیت شرکت پذیری است؟

iii ـ کدامیك ازاین عمل‌ها روی N دارای خاصیت جابجائی است؟

تمرین۳ ـ عمل «*» را روی N بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$m*n = m^n \qquad \forall (m, n) \in N \times N$$

الف ـ آیا «*» روی N دارای خاصیت جابجائی است؟

ب ـ آیا «*» روی N دارای خاصیت شرکت پذیری است ؟

تمرین ۴ ـ عمل (o) را روی Z بصورت زیر تعریف میکنیم :

$$m o n = m + n + mn \qquad \forall (m,n) \in Z \times Z$$

الف ـ عضو بی‌اثر این عمل را پیداکنید .

ب ـ عضو وارون هر عضواز Z را نسبت به این عمل بدست آورید.

تمرین ۵ ـ عمل «*» روی مجموعه $\{e , x , y , z\}$ طبق جدول‌زیر تعریف شده است.

*	e	x	y	z
e	e	x	y	z
x	x	e	y	z
y	y	z	e	x
z	z	y	x	e

الف ـ عضو بی‌اثر «*» را مشخص‌کنید .

ب ـ عضو وارون هرعضو ازمجموعه $\{e , x , y , z\}$ را بدست‌آورید .

تمرین ۶ ـ عمل «*» را روی مجموعه {۲،۱،۰} طبق جدول زیرتعریف میکنیم :

*	۰	۱	۲
۰	۰	۲	۱
۱	۱	۰	۲
۲	۲	۱	۰

آیا ({۰،۱،۲} و *) یک‌گروه است؟ دلیل پاسخ خود را بیان‌کنید .

تمرین ۷ـ تعیین کنید کدامیک از مجموعه‌هـای زیر همراه بـا عمل ضرب معمولـی یک گروه است .

الفـ $\{-1 , 0 , 1\}$

بـ N

تمرین ۸ ـ آیـا مجموعه $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ همراه بـا عمل‌ضرب مـاتریسهای 2×2 یک‌گروه است ؟ دلیل پاسخ خـود را بیان‌کنید .

